Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Žákovské pojetí pravidelnosti

Student's conception of regularity

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Autor: Bc. Radek Šmíd

Praha 2015

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně pod vedením Prof. RNDr. Jarmily Novotné, CSc. V práci jsou použity informační zdroje uvedené na konci práce v seznamu literatury.

V Praze dne 20. července 2015

Radek Šmíd

Děkuji všem, kteří mě vedli na cestě k napsání této diplomové práce, ze zástupců katedry zejména Prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc. za pečlivé vedení při její realizaci.

Abstrakt

Tato práce je náhledem do pojetí pravidelnosti v matematice. Jsou rozebrány možné přístupy k pojmu pravidelnost v rámci matematiky, představeny vlastnosti a vztahy pravidelných geometrických útvarů a na základě analýzy učebnic je zkoumáno pojetí pravidelnosti ze strany žáků. Tato analýza učebnic z hlediska pravidelnosti je také součástí práce.

Cílem práce je zjistit, mezi kterými typy objektů jsou žáci schopni vnímat souvislost na základě pravidelnosti těchto objektů a zda neupřednostňují při výběru objektů, které nepatří do skupiny, jiná kritéria. Zjišťování probíhalo formou dotazníku zadaného ve dvou třídách jako test s možností odpovídat na každou otázku vícekrát. Při analýze získaných dat byla sledována zejména četnost a způsob vyjádření výběru na základě pravidelnosti, dále nejčastější ostatní kritéria výběru a vztahy mezi používanými kritérii.
Klíčová slova: pravidelnost, pojetí pravidelnosti, geometrie, dotazníkové šetření

Abstract

This paper is a view into the conception of regularity in mathematics. Possible approaches to the concept of regularity in mathematics are dicussed. There is a presentation of the characteristics and relations of regular geometric figures. The conception of regularity on the part of students is explored based on the analysis of the math textbooks. This analysis of textbooks in terms of regularity is also part of the work.

The aim is to identify the types of objects which pupils are able to perceive as relationed by regularity of these objects and whether they rather use other criteria when selecting objects that do not belong to the group. Mostly the frequency and manner of expression of selection on the basis of regularity was monitored when analyzing acquired data, as well as the other most common selection criteria and the relations between the criteria used.

Keywords: regularity, conception of regularity, geometry, questionnaire

Obsah

Úvod **8**

1 Pojetí pravidelnosti **10**

2 Pravidelné mnohoúhelníky **13**

2.1 Míry pravidelných mnohoúhelníků 14

2.2 Částečné porušení pravidelnosti 16

3 Pravidelné mnohostěny **18**

3.1 Počet platónských těles 19

3.1.1 Eulerova věta 19

3.1.2 Důkaz pomocí Eulerovy věty 20

3.1.3 Antický důkaz počtu platónských těles 21

3.2 Dualita platónských tělese 22

3.3 Vzájemné vpisování platónských těles 24

3.4 Pravidelný čtyřstěn 26

3.4.1 Vzorce a odvození 26

3.5 Krychle 29

3.5.1 Vzorce a odvození 29

3.6 Pravidelný osmistěn 31

3.6.1 Vzorce a odvození 31

3.7 Pravidelný dvanáctistěn 34

3.7.1 Odvození některých vzorců 35
3.7.2 Délky, povrch a objem 42
3.7.3 Odchylky 44
3.7.4 Třetiny objemu 47
3.8 Pravidelný dvacetistěn 49
3.8.1 Vzorce a odvození 49
3.9 Související tělesa 53
3.9.1 Kepler-Poinsotova tělesa 53
3.9.2 Archimédova tělesa 55
3.9.3 Hranoly a antihranoly 57
3.9.4 Kosočtverečné mnohostěny 58
3.9.5 Další ježci 59

4 Výzkum **61**
4.1 Hypotézy 61
4.2 Dotazník pro učitele a studenty učitelství 63
4.3 Analýza učebnic 65
4.3.1 Coufalová a kolektiv, Fortuna 65
4.4 Dotazník 79
4.4.1 Zadání dotazníku 83
4.4.2 Analýza dat 83
4.4.3 Žákovské přístupy k výběru 87
4.5 Shrnutí výsledků 89

Závěr **92**

Literatura **93**

Seznam příloh **96**

Úvod

Pravidelnost se v různých podobách vyskytuje napříč matematikou. Nejtypičtější je pro geometrii, ve které existují pravidelné útvary (mnohoúhelníky a mnohostěny), jejichž zkoumání — v případě mnohostěnů popsané již v bakalářské práci (Šmíd, 2012), na kterou tato práce navazuje — podpořené jistou fascinací těmito objekty, bylo několikrát hybnou silou nejen matematiky.

Jedním z příkladů v historii matematiky může být objev iracionálních čísel v podobě nesouměřitelných úseček, respektive neměřitelnosti úhlopříčky pomocí strany ve čtverci nebo pravidelném pětiúhelníku. „Objev existence nesouměřitelných úseček lze pokládat za první významný matematický výsledek; je totiž hluboký, netriviální a vyžaduje důkaz sporem. Poznamenejme, že zvolíme-li nějakou úsečku c za jednotku délky, potom mají všechny úsečky souměřitelné s touto úsečkou c racionální délky, zatímco ostatní úsečky mají délky iracionální.“ (Bečvář, Bečvářová, 2012, str. 14)

Dalšími příklady mohou být konstrukce pravidelných n-úhelníků a později dokazování nekonstruovatelnosti některých z nich, nebo Keplerova snaha o uspořádání sluneční soustavy pomocí platónských těles, která nakonec vedla k objevu eliptických oběžných drah. To jsou případy, kdy pravidelné objekty podnítily intenzivní činnost, která se dále ubírala jiným směrem. Dodejme, že problém nekonstruovatelnosti některých pravidelných mnohoúhelníků (ale obecně problém konstruovatelnosti) byl vyřešen až roku 1832 na poli algebry.

Výskyt pravidelnosti nejen v geometrii, ale i v ostatních matematických disciplínách je rozebrán v kapitole 1. Snahou je představit co nejširší spektrum matematických pojmů, které mohou být považovány za pravidelné, a najít mezi nimi souvislosti. Pro rozšíření počtu těchto pojmů posloužil internetový dotazník mezi učiteli a studenty učitelství matematiky, který je podrobně popsán v části 4.2.

Podrobně jsou popsány pravidelné geometrické útvary. Pravidelným mnohoúhelníkům a jejich vlastnostem je věnována kapitola 2, společné vlastnosti pravidelných mnohostěnů jejich vzájemné vztahy i specifické vlastnosti pro každý z pravidelných mnohostěnů jsou v kapitole 3. Vzorce a odvození uvedené v těchto dvou kapitolách je možné využít ve výuce, některé již na druhém stupni základních škol.

Cílem práce bylo odhalit, jak žáci na konci povinné školní docházky vnímají pravidelnost, do jaké míry je pro ně čistě geometrickým pojmem a zda rozlišují pravidelnost těles a pravidelnost mnohoúhelníků. Pro tento cíl byla zvolena metoda dotazníku s volným počtem otevřených odpovědí — žáci byli nabádáni k tvorbě více odpovědí na stejnou otázku.

Kapitola 4 je již plně věnována přípravě, provedení a vyhodnocení tohoto výzkumu. Formulaci hypotéz a následnému vytvoření a zadání dotazníku pro žáky devátého ročníku základní školy předcházelo zpracování již výše zmíněného dotazníku mezi učiteli a studenty učitelství matematiky a také analýza učebnic pro druhý stupeň základní školy. Tato analýza ovlivnila tvorbu hypotéz, které byly formulovány spíše skepticky a jejich potvrzení v plném rozsahu by pro autora práce nebylo potěšující.

Kapitola 1

Pojetí pravidelnosti

Pravidelnost není jasně definovaným matematickým pojmem. Nejvíce (nebo nejvíce přiznaně) je používána v geometrii. Geometrickými pojmy jsou pravidelné mnohoúhelníky, pravidelné mnohostěny, pravidelné hranoly a jehlany. Nicméně pravidelnost ve smyslu opakování se vyskytuje v mnoha matematických disciplínách. Příkladem mohou být periodické funkce nebo periodický rozvoj desetinných čísel.

Vlastnost, která mohla vést k fascinaci pravidelnými geometrickými útvary, je jistá nezávislost na vzájemném umístění útvaru a pozorovatele — pokud si čtyři lidé sednou rovnoměrně kolem čtverce, uvidí před sebou všichni čtyři útvar ve stejné poloze vůči nim; kdyby každý vyfotografoval čtverec před sebou, vznikly by čtyři identické obrazy jednoho čtverce, každý z jiného úhlu. Obecněji existují pro každý pohled na daný objekt další pohledy, které jsou od něj nerozlišitelné.

Tuto vlastnost mají i zmíněné periodické funkce — pokud pozorovatel vidí část grafu periodické funkce, nemůže bez popisu na ose jednoznačně určit, která část grafu to je. Podobnou vlastnost mají také fraktály, u kterých rovněž nelze určit nejen to, na kterou jejich část se díváme, ale nejsme schopni rozhodnout ani o přiblížení, v jakém fraktál sledujeme.

Další možnou interpretací pravidelnosti je požadavek na existenci pravidla mezi jednotlivými částmi objektu. Tím se mezi pravidelné objekty dostávají například posloupnosti.

Jejich každý člen jde dopočítat z předchozích členů — stačí znát pravidlo tohoto výpočtu nebo mít k dispozici dostatek členů pro jeho určení.

Vrátíme-li se k planimetrii, vynechali jsme jeden útvar, který splňuje nezávislost na úhlu pohledu lépe než kterýkoli pravidelný mnohoúhelník: kruh. Kruh je někdy žáky vnímán jako „pravidelný nekonečnoúhelník" — zvláště po odvození jeho obsahu rozkladem na shodné výseče, skoro trojúhelníky. Je to jedna z prvních zkušeností s limitním přechodem nejen v ontogenezi matematického vnímání žáka, ale i v historickém vývoji matematiky.

Je to ale jen jeden pohled na pravidelný n-úhelník pro $n \to \infty$. Pohled pochopitelný, protože zvláště pro vyšší n jsou tyto n-úhelníky často vpisovány do kružnice, a v takovém případě se délka strany limitně blíží nule a pravidelný n-úhelník lépe a lépe vyplňuje celý kruh ohraničený danou kružnicí.

Druhý pohled je rovněž oprávněný: Mějme pravidelný n-úhelník se stranou jednotkové délky. Potom se pro rostoucí n bude měnit pouze počet vrcholů a stran a tím i úhel α u vrcholu n-úhelníku. Ze součtu vnitřních úhlů mnohoúhelníku a ze shodnosti všech vnitřních úhlů pravidelného mnohoúhelníku platí $\alpha = \dfrac{n \cdot 180^\circ - 360^\circ}{n}$, po úpravě $\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, v limitě potom

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = 180^\circ .$$

Tedy přímý úhel. Úsečky jednotkové délky by svíraly přímý úhel a při tomto způsobu limitního přechodu by tedy byla „pravidelným nekonečnoúhelníkem" přímka.

Přímku můžeme chápat také jako graf konstantní funkce, jakožto speciálního případu výše zmíněné periodické funkce. A v neposlední řadě také jako objekt konstruovaný pomocí pravidla (v případě přímky může být tímto pravidlem vektor).

Podobné vlastnosti jsou popsány i ve Vopěnkově komentáři k Základům (Eukleides, 2011) v kapitole *Rodina platónských geometrických objektů*: „Úsečky (přímky) a kružnice jsou základními geometrickými objekty. Je tomu tak proto, že úsečka je nejčistší představitelkou ideje přímosti, neboť je všude stejně přímá. Podobně kružnice je nejčistší představitelka ideje křivosti, neboť je všude stejně křivá." Toto „všude stejně" je tou výše zmíněnou nezávislostí na vzájemném postavení objektu a pozorovatele.

Jakkoli je možné, a podle našeho názoru žádoucí, dívat se na pravidelnost z širšího pohledu — nejen jako na pravidelnost vybraných geometrických útvarů, uvedeme alespoň některé vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků a pravidelných mnohostěnů. Další vlastnosti lze nalézt v literatuře citované v jednotlivých kapitolách. Pravidelné mnohoúhelníky jsou zpracovány obecně, protože existují pro každý počet vrcholů, pravidelné mnohostěny jsou podrobně zpracovány jednotlivě v kapitole 3.

Kapitola 2

Pravidelné mnohoúhelníky

Pravidelné mnohoúhelníky, někdy také pravidelné n-úhelníky, jsou takové mnohoúhelníky, které mají shodné všechny strany a všechny vnitřní úhly. Každému pravidelnému n-úhelníku lze opsat kružnici, jinými slovy všechny jeho vrcholy leží na jedné kružnici, a rovněž vepsat kružnici — ta prochází středy všech stran daného pravidelného n-úhelníku. Tyto dvě kružnice jsou soustředné a jejich společný střed je zároveň středem mnohoúhelníku.

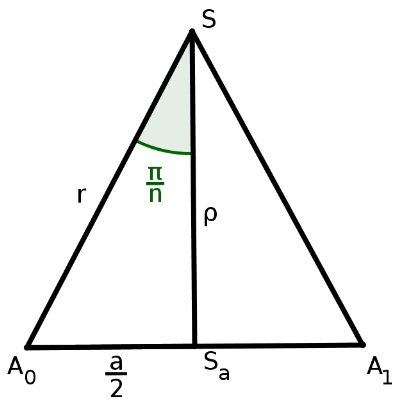
Ve skriptech Planimetrie (Boček, Zhouf, 2009, str. 115 − 116) jsou pravidelné mnohoúhelníky zavedeny takto: „Zvolme přirozené číslo $n \geq 3$ a na kružnici k o poloměru r a středu S body A_0 ,A_1 tak, aby velikost úhlu A_0SA_1 byla v obloukové míře $\frac{2\pi}{n}$, ve stupních $\frac{360^\circ}{n}$. Sestrojme dále body A_2 ,A_3 ,$\ldots$ tak, aby úhly $A_{i-1}SA_i$ měly tutéž velikost. Pak splyne bod A_n s bodem A_0 a průnikem všech polorovin $A_{i-1}AiS$ $(i = 1, 2, \ldots , n)$ je pravidelný n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$, který je konvexní.“

V pravidelném n-úhelníku je $\frac{1}{2}n\,(n-3)$ úhlopříček. Z každého vrcholu (n) vychází úhlopříčka do všech vrcholů kromě dvou sousedních a jeho samého $(n - 3)$ a každá úhlopříčka spojuje dva vrcholy $(\frac{1}{2})$. V trojúhelníku jsou oba ostatní vrcholy sousední a neexistuje tedy žádná úhlopříčka, ve čtverci existují dvě úhlopříčky, z každého vrcholu právě jedna, proto mají obě stejnou délku. V pětiúhelníku již z každého vrcholu vychází dvě úhlopříčky a protože míří k vrcholům kolem protilehlé strany, má všech pět úhlopříček pravidelného pětiúhelníku stejnou délku. To neplatí v pravidelném šestiúhelníku, kde již jsou úhlopříčky různých délek. Jedna míří do protějšího vrcholu a je nejdelší, zbývající dvě úhlopříčky ze stejného vrcholu vedou k vrcholům sousedním s tím protějším. Nejdelší úhlopříčky budeme nazývat hlavní.

Podrobněji se pravidelným mnohoúhelníkům věnuje například (Němec, 2007), zejména pravidelnému pětiúhelníku.

2.1 Míry pravidelných mnohoúhelníků

V pravidelných mnohoúhelnících již známe velikosti vnitřních úhlů $\alpha = \dfrac{n \cdot 180^\circ - 360^\circ}{n}$ (respektive v obloukové míře $\alpha = \dfrac{(n-2)\,\pi}{n}$) a z výše uvedeného zavedení pravidelných mnohoúhelníků z (Boček, Zhouf, 2009) také velikost středového úhlu $\frac{360^\circ}{n}$ (respektive v obloukové míře $\frac{2\pi}{n}$). Na základě věty o obvodovém a středovém úhlu potom můžeme již snadno určit úhel, který svírají dvě úhlopříčky nebo strany vedené z jednoho vrcholu do dvou sousedních vrcholů: $\frac{180^\circ}{n}$ (respektive v obloukové míře $\frac{\pi}{n}$). Podotkněme, že vnitřní úhel u vrcholu je úhlopříčkami dělen na $n-2$ stejných částí. Pro pravidelné mnohoúhelníky lze délky, které se v nich vyskytují, vyjádřit obecně na základě délky hrany, kterou



Obr. 2.1: Vztah poloměrů vepsané a opsané kružnice se stranou pravidelného n-úhelníku

označíme a, poloměru opsané kružnice, značeného r, a poloměru vepsané kružnice, značeného ϱ. I mezi těmito délkami existují vztahy dobře viditelné na obr. 2.1, ale v dalších vzorcích budou zastoupeny volně tak, aby byl vzorec co nejjednodušší, protože není důvod upřednostňovat délku strany nebo poloměr jedné z kružnic.

Jedním vztahem je Pythagorova věta, která platí v pravoúhlém trojúhelníku A_0S_aS

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \varrho^2 = r^2\,.$$

Tento vztah ale obsahuje všechny tři délky současně a tím je pro vyjádření vzájemné závislosti nepraktický. Mnohem užitečnější jsou podíly r, ϱ a $\frac{a}{2}$, které odpovídají hodnotám goniometrických funkcí pro úhel $\measuredangle S_aS\ A_0$, který má v závislosti na n-úhelníku velikost $\frac{\pi}{n}$ a platí

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{a}{2r}\,,\ \cos\frac{\pi}{n} = \frac{\varrho}{r}\,,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{a}{2\varrho}\,.$$

Obvod pravidelného mnohoúhelníku je samozřejmě n-násobkem délky strany:

$$O\ = na$$

Obsah pravidelného mnohoúhelníku je součtem obsahů n rovnoramenných trojúhelníků, ve kterých jsou ramena délky r, základna a a výška na základu ϱ:

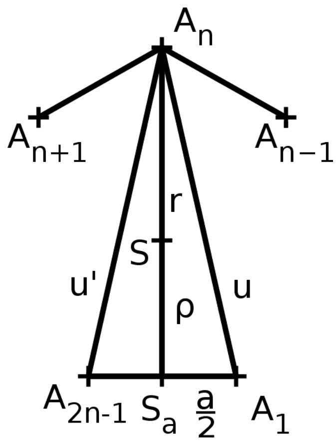
$$S\ = n\frac{a\varrho}{2}$$

Vyjádření délky hlavních úhlopříček, kterou budeme značit u, se různí podle počtu vrcholů — pro $2n$-úhelníky je z každého vrcholu nejdelší úhlopříčka vedena do protějšího vrcholu, a je tedy zároveň průměrem opsané kružnice — rovnají se tedy i jejich délky

$$u = 2r\,.$$

V těchto mnohoúhelnících je snadné odvodit i délku druhé nejdelší úhlopříčky, kterou budeme značit u_2, která je díky středové souměrnosti a tím také rovnoběžnosti protějších stran, vedena vždy do neprotějšího vrcholu u protější strany a je tak rovnoběžná s průměrem vepsané kružnice spojujícím středy dvou protějších stran. Díky tomu se rovnají i jejich délky:

$$u_2 = 2\varrho$$



Obr. 2.2: Odvození délky hlavní úhlopříčky pravidelného mnohoúhelníku s lichým počtem vrcholů

Pro $(2n-1)$-úhelníky, ve kterých z každého vrcholu vedou dvě hlavní úhlopříčky do vrcholů kolem protější strany, je vyjádření složitější. Jak lze dovodit pomocí obr. 2.2, délku úhlopříčky můžeme vyjádřit z Pythagorovy věty

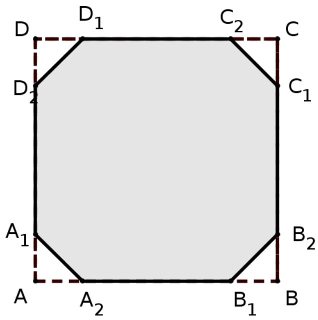
$$u = \sqrt{(r+\varrho)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

nebo pomocí goniometrických funkcí například takto:

$$u = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\frac{\pi}{4n-2}}$$

2.2 Částečné porušení pravidelnosti

Pro pěstování představivosti je dobré uvést, že pro $n \geq 4$ existují n-úhelníky, které mají jen jednu z vlastností pravidelných n-úhelníků — shodné úhly nebo shodné strany. Pro $n = 4$ jsou to obdélník a kosočtverec — při zachování shodnosti úhlů jsou zachovány i osové souměrnosti kolem os stran, při zachování shodnosti stran jsou zachovány osové souměrnosti kolem os úhlů. Již pro $n = 5$ to ale obecně neplatí. Pro vyšší sudá n lze ale konstruovat mnohoúhelníky, které přebírají souměrnosti od pravidelných $\frac{n}{2}$-úhelníků, ze kterých jsou vytvořeny shodným „uřezáváním vrcholů“, jak je na příkladu osmiúhelníku vznikajícího ze čtverce ukázáno na obr. 2.3. Podobným způsobem vznikají některá polopravidelné mnohostěny, takzvaná Archimédova tělesa, z platónských těles.



Obr. 2.3: Ukázka osmiúhelníku vzniklého ze čtverce shodným „uřezáváním vrcholů“

Kapitola 3

Pravidelné mnohostěny

Jedním z nejstarších dochovaných pramenů o pravidelných mnohostěnech je jejich popis v Platónově v dialogu Timaios (Platón, 1996). Druhým důvodem, proč jsou pravidelné mnohostěny jinak také nazývány platónská tělesa, může být, že svojí pravidelností jsou těmi nejlepšími (podle Platóna) představiteli svého druhu — tedy platónskou ideou. Podrobně se jimi zabývala bakalářská práce (Šmíd, 2012), z které je až na drobné úpravy převzat jejich následující popis a výčet vlastností.

Podobně jako pravidelné n-úhelníky, kterým lze vepsat a opsat kružnici, mají platónská tělesa vepsanou a opsanou kouli, navíc jako třetí existuje koule dotýkající se středů hran. Jsou zde tedy tři význačné koule — opsaná, na které leží vrcholy tělesa, vepsaná, na které leží středy stěn, a hranová, která je de facto vepsána drátěnému modelu. Středy všech těchto koulí splývají ve všech případech v jednom bodě (Sutton, 2011). Značení se v literatuře různí, poloměr vepsané koule je někdy značen ϱ a opsané koule r, v této práci je budeme značit běžným písmenem r opatřeným indexem, tedy od největšího r_o, r_h, r_v.

Pro rozšíření obzorů jsou na konci kapitoly uvedena tělesa, která nesplňují všechny požadavky pravidelných mnohostěnů, ale dají se z platónských těles odvodit v několika krocích.

3.1 Počet platónských těles

Pravidelný n-úhelník existuje pro každé n, a je jich tedy nekonečně mnoho, ale platónských těles je právě pět. Předvedeme dva důkazy tohoto tvrzení. První je matematicky přesvědčivější, pomocí Eulerovy věty, kterou rovněž předvedeme včetně důkazu, druhý je naopak geometricky názornější, ale možná náročnější na představivost. Druhým důvodem jeho uvedení je jeho historická hodnota — je znám nejpozději od Theaitéta z Athén (417–369 př.n.l). (Svobodová, 2006)

3.1.1 Eulerova věta

Označíme v počet vrcholů, h počet hran a s počet stěn tělesa. V konvexním mnohostěnu potom platí

$$v + s - h = 2\,.$$

Existuje mnoho způsobů, jak toto tvrzení dokázat, několik z nich popisuje Vytisková . Pro potřeby této práce dozajista stačí jeden. Ten je inspirován důkazem číslo 7 (Vytisková, 2009, str. 46–47).

Důkaz je veden indukcí pro tělesa s trojúhelníkovými stěnami, pro stěny jiných tvarů pak úpravou. Čtyřstěn má čtyři stěny, čtyři vrcholy a šest hran. A protože $4 + 4 - 6 = 2$, tvrzení pro něj platí.

Dále přidávejme vždy jeden vrchol nad libovolnou stěnu (vně tělesa tak, aby nové těleso bylo konvexní), což dá zaniknout této stěně. Každou ze tří hran dosud ohraničujících bývalou stěnu spojuje ale s novým vrcholem nová stěna a od každého ze tří vrcholů náležejících původní stěně k němu vede nová hrana. Tento indukční krok zapíšeme symbolicky:

$$v_{n+1} = v_n + 1$$

$$s_{n+1} = s_n + 2$$

$$h_{n+1} = h_n + 3$$

Pokud pro původní těleso Eulerova věta platila, platí i pro těleso obohacené o jeden vrchol:

$$v_{n+1} + s_{n+1} - h_{n+1} = (v_n + 1) + (s_n + 2) - (h_n + 3) = v_n + s_n - h_n = 2$$

Ne každé těleso je ale ohraničeno trojúhelníky. Předchozí postup však nebránil vzniku sousedních komplanárních stěn. Pokud odebereme hranu, která dvě takové stěny odděluje, stane se ze dvou stěn jedna, dohromady počet stěn klesne o jednu stejně jako počet hran. Počet vrcholů se nezměnil. I zde tedy platí, že pokud věta platila pro původní těleso, platí i pro nové:

$$v_{m+1} + s_{m+1} - h_{m+1} = v_m + (s_m - 1) - (h_m - 1) = v_m + s_m - h_m = 2$$

3.1.2 Důkaz pomocí Eulerovy věty

Předpokládejme existenci pravidelného konvexního mnohostěnu, ve kterém jsou stranami pravidelné p-úhelníky a v každém vrcholu se stýká q těchto p-úhelníků.

Vzhledem k tomu, že každá hrana náleží dvěma stranám, platí pro počet stěn a hran vztah $\frac{ps}{2} = h$, po úpravě $s = \frac{2h}{p}$. Také z každého vrcholu vede q hran a každá hrana spojuje dva vrcholy. Analogicky tedy platí $\frac{qv}{2} = h$, respektive $v = \frac{2h}{q}$. Upravené vztahy dosadíme do Eulerovy věty:

$$\frac{2h}{q} + \frac{2h}{p} = 2 + h$$

Na levé straně je stejný čitatel, kterým obě strany rovnice vydělíme a dostaneme

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{h} + \frac{1}{2}$$

a tuto rovnici řešíme jako diofantovskou s omezením $p \geq 3$ a $q \geq 3$; připomeňme, že stěna je p-úhelník a q je počet stěn nebo hran u vrcholu, pro obě čísla je tedy minimum 3. Zároveň i počet hran je kladný, takže aby rovnost mohla být splněna, musí platit

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}\,,$$

což nemůže být splněno, pokud jsou $p > 3 \wedge q > 3$. Alespoň jedno z čísel p, q tedy musí být rovno 3.

Nechť napřed $p = 3$, potom

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{3} = \frac{1}{h} + \frac{1}{2}$$

a po úpravě

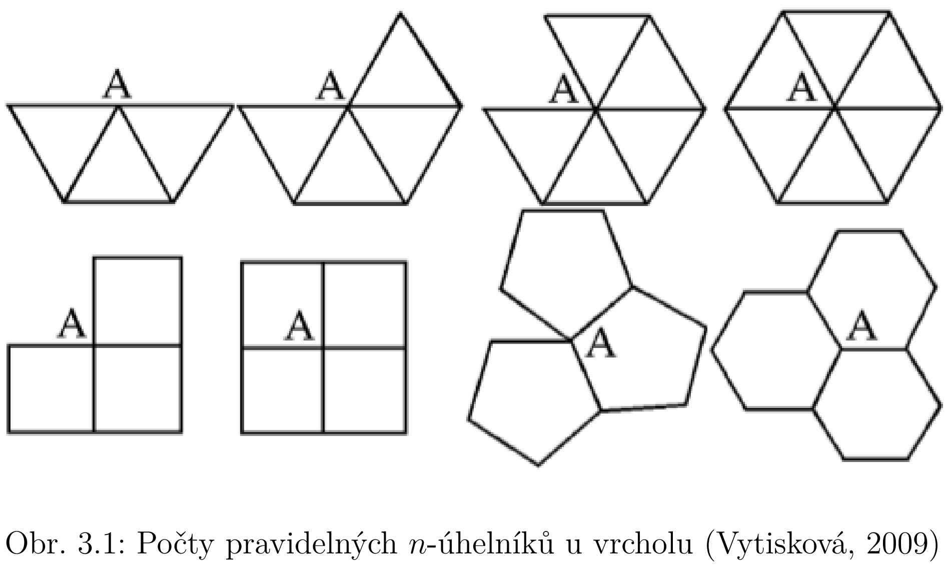
$$\frac{1}{q} - \frac{1}{6} = \frac{1}{h}\,.$$

Víme, že h je kladné, přípustné hodnoty q jsou tedy z množiny $\{3, 4, 5\}$. Stejného výsledku se nám dostane i při volbě $q = 3$, kde z rovnice $\frac{1}{p} - \frac{1}{6} = \frac{1}{h}$ dostáváme množinu $\{3, 4, 5\}$ jako množinu možných hodnot p.

Dvakrát jsme tedy získali tři možné kombinace, už na první pohled je ale vidět, že kombinace $p = 3$ a $q = 3$ se vyskytuje dvakrát. Omezili jsme tedy počet pravidelných těles na pět. O jejich existenci se přesvědčíme konstrukcí v kapitolách 3.4 až 3.8.

3.1.3 Antický důkaz počtu platónských těles

Důkaz uvedený v Eukleidových Základech je založen na konstrukci pravidelných prostorových úhlů, jak je u bodu A naznačeno na obr. 3.1. Pro vznik prostorového úhlu použitelného



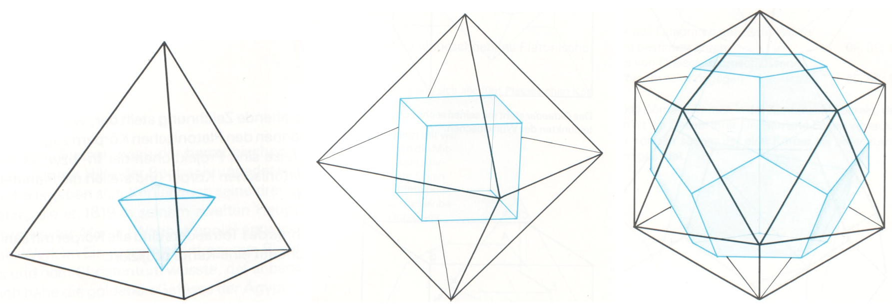
Obr. 3.1: Počty pravidelných n-úhelníků u vrcholu (Vytisková, 2009)

v pravidelném mnohostěnu je potřeba alespoň tří pravidelných mnohoúhelníků. Nejmenším je trojúhelník, který vytvoří prostorový úhel v počtu tří, v počtu čtyř i v počtu pěti u jednoho vrcholu. Šest rovnostranných trojúhelníků vyplňuje plný rovinný úhel a tvoří pravidelný šestiúhelník. (Svobodová, 2006)

Čtverec, pravidelný čtyřúhelník, vytvoří prostorový úhel jen v počtu tří, čtyři pravé úhly čtverce tvoří opět plný úhel. Pravidelný pětiúhelník má vnitřní úhel u vrcholu 108°, tři pětiúhelníky tedy vytvoří prostorový úhel, čtyři se v rovině již překrývají a tři šestiúhelníky tvoří plochu, jak je vidět na obr. 3.1.

Tím je vymezeno pět pravidelných prostorových úhlů, jejichž opakováním ve všech vrcholech vzniká pět platónských těles. To, že všechna tělesa existují, dokázal Eukleidés jejich konstrukcí - vzniká tak s trojúhelníkovými stranami čtyřstěn, osmistěn a dvacetistěn, se čtvercovými stranami krychle (pravidelný šestistěn) a s pětiúhelníkovými stranami dvanáctistěn.

3.2 Dualita platónských tělese



Obr. 3.2: Příklady duálních těles, převzato z (Adam, Wyss, 1994)

Z řešení diofantovské rovnice v důkazu existence právě pěti platónských těles (odstavec 3.1.2)

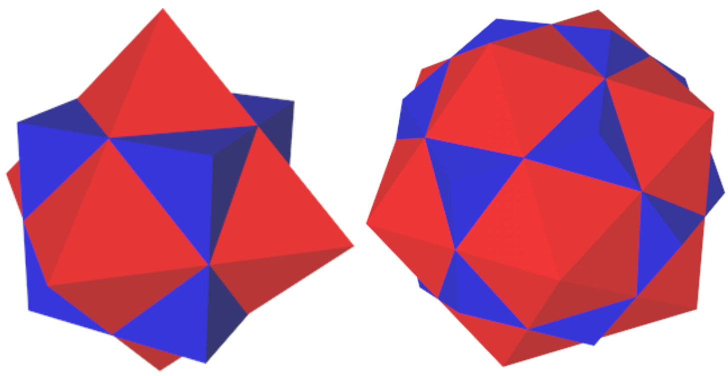
$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=\frac{1}{h}+\frac{1}{2}$$

je zřejmé, že p a q jsou v řešení zaměnitelné — pokud je pro p a q nějaká uspořádaná dvojice řešením této rovnice, pak je řešením i uspořádaná dvojice s opačným pořadím. Připomeňme, že p je počet hran (nebo vrcholů) kolem jedné stěny a q je počet hran (nebo stěn) kolem jednoho vrcholu. Dualita je používána i v teorii grafů pro záměnu stěn a vrcholů. Pro zachování pravidelnosti je u těles důležité použít pro nový vrchol středy původních stěn, jak je znázorněno na obr. 3.2.

Protože se u každého ze tří vrcholů pravidelného čtyřstěnu stýkají tři stěny, je pravidelný čtyřstěn duální sám se sebou, stěny pravidelného osmistěnu se stýkají ve vrcholech po čtyřech a toto těleso je tedy duální s krychlí. A zbývající dvě tělesa jsou navzájem duální: středy stěn pravidelného dvacetistěnu tvoří vrcholy pravidelného dvanáctistěnu a naopak.

Další vzájemně propojenou konstrukcí je splynutí středů hran (obr. 3.3), v takovém případě splývají hranové koule obou těles. Sjednocením dvou takto umístěných duálních těles vznikl nový mnohostěn, nepravidelný, nekonvexní, ale přesto „dost pravidelný“, který budeme dále nazývat dvojtělesem.

Obě duální tělesa spolu s tímto novým sdílí grupu symetrií. Důkaz není složitý. Je jasné, že dvojtěleso nemá žádnou symetrii navíc oproti ani jednomu z původních duálních těles, a tedy původní tělesa mají všechny symetrie dvojtělesa. Žádná symetrie ale nezanikla: nad každou stěnou, pravidelným n-úhelníkem, je vztyčen pravidelný n-boký jehlan se základnou danou středy hran původní stěny a vrcholem, který je na kolmici ze středu stěny – a nezáleží na volbě výchozího tělesa, jak je vidět na obr. 3.3.



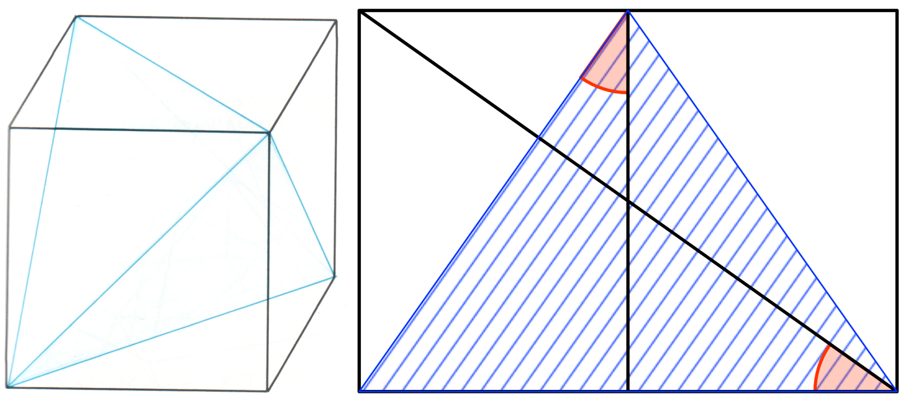
Obr. 3.3: Příklady dvojtěles: vlevo krychle s osmistěnem, vpravo dvanáctistěn s dvacetistěnem

Středové symetrie jsou zachovány – jehlan je otočen společně se stěnou, nad kterou je vztyčen. Osy symetrií mohou procházet středem stěny – v tom případě prochází i vrcholem jehlanu a symetrie je zachována, nebo původním vrcholem – v tom případě se jehlan nad stěnou zobrazí na jehlan příslušný stěně, na kterou se zobrazila původní stěna. Plochy symetrií jsou dány středem tělesa společně s osou symetrie stěny a díky tomu, že hlavní vrchol jehlanu leží stejně jako střed na kolmici ke stěně, je jehlan vždy symetrický podle takové plochy.

Rozborem možností jsme tedy vyloučili ztrátu symetrie a zároveň tím prokázali, že obě duální tělesa mají stejné symetrie. Že symetrie tvoří společně se skládáním grupu, je zřejmé.

3.3 Vzájemné vpisování platónských těles

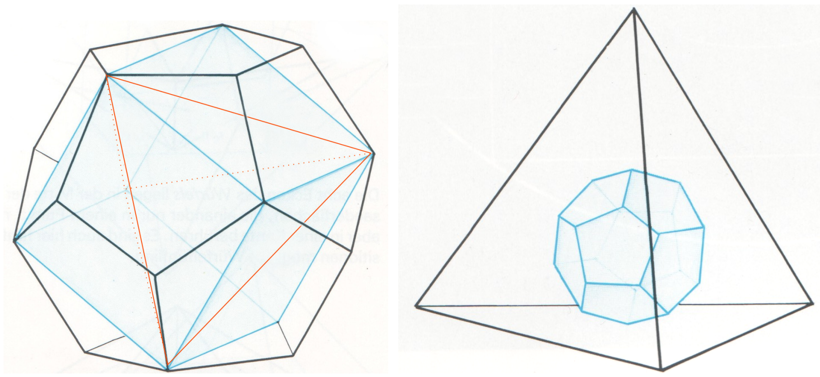
Dualita není jediným způsobem, jak vepsat jedno platónské těleso do druhého. Počty vrcholů a stěn také nejsou jediná čísla opakující se v popisu platónských těles: čtyřstěn má šest hran, krychle má šest stěn a dvanáct hran – a to je počet stěn dalšího platónského tělesa. V těchto případech použijeme metodu vepsání „hrana na stěnu“, která je de facto jedinou nosnou myšlenkou, jak do sebe vpisovat neduální tělesa.



Obr. 3.4: Čtyřstěn vepsaný do krychle, převzato z (Adam, Wyss, 1994), a rovnost poloviny odchylky stěn čtyřstěnu a odchylky úhlopříčky od stěny na řezu krychle

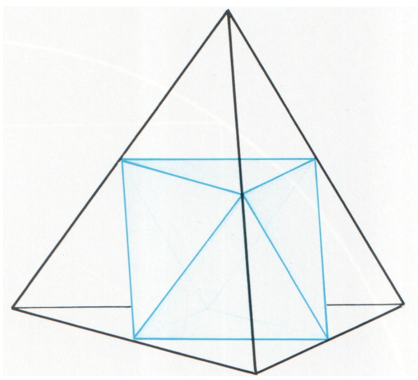
Zároveň začne být patrná rovnost úhlů v krychli a čtyřstěnu, jak je vidět na úhlopříčném řezu krychle (obr. 3.4); díky poměru délek hrany a stěnové úhlopříčky krychle $1 : \sqrt{2}$ jsou dva vyznačené úhly shodné.

Opakovaným použitím vepíšeme čtyřstěn do dvanáctistěnu pomocí již vepsané krychle – použijeme ne osm z dvaceti vrcholů, ale jen čtyři. Pro vepsání dvanáctistěnu do čtyřstěnu využijeme již vepsanou krychli. Protože na stěnách čtyřstěnu leží vrcholy krychle, opíšeme dvanáctistěn této krychli s využitím těchto čtyř vrcholů (obr. 3.5).



Obr. 3.5: Čtyřstěn vepsaný pomocí krychle do dvanáctistěnu a dvanáctistěn vepsaný do čtyřstěnu, převzato z (Adam, Wyss, 1994)

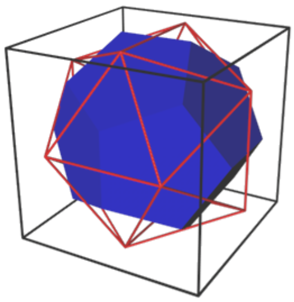
Protože mají obě tělesa společný střed, dá se tato myšlenka vpisování použít i obráceně; těleso původně vpisované se zvětší tak, aby od středu nejvzdálenější body původně vnějšího tělesa ležely ve stěně zvětšeného tělesa. Tím získáme krychli vepsanou do čtyřstěnu a dvanáctistěn vepsaný do krychle. V prvním případě leží ve stěnách čtyřstěnu čtyři z osmi vrcholů (druhé čtyři jsou na poloměrech koule opsané vedených k vrcholům čtyřstěnu). V druhém případě leží ve stěnách krychle vždy hrana dvanáctistěnu.



Obr. 3.6: Osmistěn vepsaný čtyřstěnu, převzato z (Adam, Wyss, 1994)

Zbývá jen zkombinovat tuto metodu vpisování s dualitou tak, abychom byli schopni navzájem vepsat i čtyřstěn a osmistěn (obr. 3.6), kde je situace jednoduchá – hrany vepsaného čtyřstěnu prochází středy stěn krychle, kde leží vrcholy osmistěnu vepsaného jak krychli, tak i čtyřstěnu. Proto mají stěny čtyřstěnu stejnou odchylku jako dvě u vrcholu protější stěny osmistěnu (kapitoly 3.4 a 3.6).

Pro vepsání dvacetistěnu do krychle využijeme již vepsaného dvanáctistěnu, který rozšíříme na dvojtěleso pomocí dvacetistěnu. Na stěně krychle budou tedy na sebe kolmé hrany dvanáctistěnu a dvacetistěnu, obou vepsaných do stejné krychle (obr. 3.7).



Obr. 3.7: Způsob vepsání dvacetistěnu do krychle pomocí již vepsaného dvanáctistěnu

Zajímavé je, že hrany krychle, dvacetistěnu a dvanáctistěnu jsou při tomto vepsání v poměru zlatého řezu po řadě $\varphi : 1 : \frac{1}{\varphi}$. (Adam, Wyss, 1994)

3.4 Pravidelný čtyřstěn

Pravidelný čtyřstěn, někdy také tetraedr, je tvořen čtyřmi stěnami, čtyřmi vrcholy a šesti hranami. V každém vrcholu se stýkají tři hrany a tři stěny, které mají tvar rovnostranného trojúhelníku. Podle Platóna je základní složkou živlu ohně.

3.4.1 Vzorce a odvození

Délku hrany označme a.

Výška stěny v_s je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku s přeponou délky a a kratší odvěsnou délky $\frac{a}{2}$; z Pythagorovy věty získáváme snadno

$$v_s = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a\,.$$

Obsah S jedné stěny je podle vzorce pro obsah trojúhelníku roven polovině součinu délky strany a a výšky v_s, tedy

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2.$$

Tělesová výška v_t vychází z těžiště podstavy, je tedy odvěsnou v pravoúhlém trojúhelníku se zbývajícími stranami délek a a $\frac{2}{3}v_s = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. Podle Pythagorovy věty je tedy

$$v_t = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a\,,$$

$$v_t = \frac{\sqrt{6}}{3}\, a\,.$$

Povrch čtyřstěnu P je čtyřnásobkem obsahu rovnostranného trojúhelníka:

$$P = \sqrt{3}a^2$$

Protože je čtyřstěn speciálním případem jehlanu, jeho objem je třetinou objemu hranolu se stejnou podstavou a stejnou výškou.

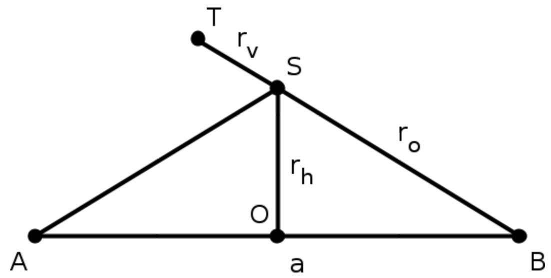
$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\, a^3.$$

Středem pravidelného čtyřstěnu je průsečík tělesových výšek, které dělí v poměru $1:3$ (jeho souřadnice jsou aritmetickým průměrem souřadnic vrcholů). Vzdálenost mezi středem a libovolným vrcholem, neboli poloměr opsané koule, je tedy tři čtvrtiny délky tělesové výšky:

$$r_o = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\, a = \frac{\sqrt{6}}{4}\, a\,.$$

Jedna čtvrtina výšky tvoří naopak vzdálenost středu od libovolné stěny a poloměr koule vepsané:

$$r_v = \frac{1}{3}r_o = \frac{\sqrt{6}}{12}\, a$$



Obr. 3.8: Poloměr hranové koule r_h

Náročnější je odvození poloměru hranové koule r_h. Nejsnáze jej lze vyjádřit jako výšku rovnoramenného trojúhelníku s rameny délky r_o a základnou délky a podle obr. 3.8. Použitím Pythagorovy věty dostaneme:

$$r_h = \sqrt{r_o^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{6}{16}\,a^2 - \frac{4}{16}\,a^2}$$

$$r_h = \frac{\sqrt{2}}{4}\,a$$

Stěny pravidelného čtyřstěnu jsou rovnostranné trojúhelníky, odchylky hran mají tedy velikost 60°. Velikost odchylky ω dvou stěn je úhlem u hlavního vrcholu rovnoramenného trojúhelníku, ve kterém je základnou hrana délky a, ramena jsou pak stěnové výšky $v_s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (na obr. 3.9), ze kterého už není problém vyjádřit

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

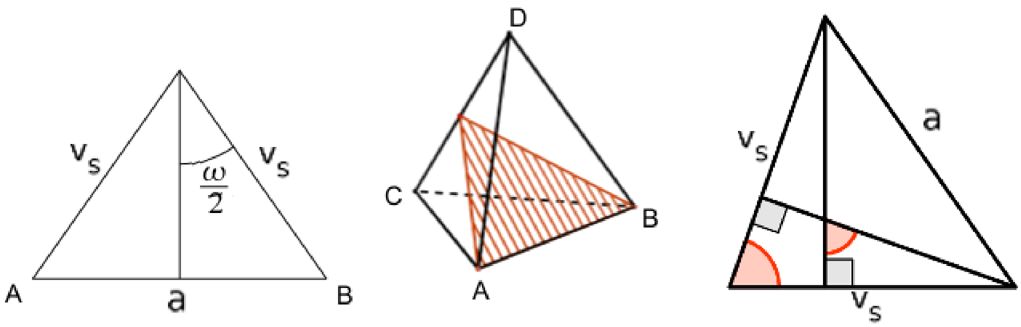
Odkud

$$\frac{\omega}{2} \doteq 35°16'\,,\ \text{a tedy}\ \omega \doteq 70°32'.$$

Stejně velký je také úhel svíraný ve středu čtyřstěnu dvěma tělesovými výškami, jak je znázorněno na obr. 3.9 vpravo.

Dalším zajímavým úhlem je úhel mezi hranou a stěnou u vrcholu. Ten je v trojúhelníku na obr. 3.9 vlevo reprezentován úhly při základně AB (úhel mezi touto hranou a například stěnou ACD) a jeho velikost lze tedy snadno dopočítat:

$$\psi = \frac{180° - \omega}{2} \doteq \frac{109°28'}{2} \doteq 54°44'$$



Obr. 3.9: Řez čtyřstěnu, odchylka jeho stěn (Chmelíková, 2007) a odchylka dvou tělesových výšek

3.5 Krychle

Krychle je platónským tělesem, se kterým se většina lidí seznámí jako s prvním prostřednictvím kostiček a hracích kostek již v útlém věku. Má šest čtvercových stěn stýkajících se po třech v osmi vrcholech, které spojuje dvanáct hran. Používá se také název hexaedr, alternativně lze krychli popsat jako pravidelný čtyřboký hranol s výškou rovnou délce hrany podstavy. Pro svojí stabilitu představovala pro Platóna živel země.

Každé dvě sousední stěny jsou na sebe kolmé, protilehlé stěny jsou rovnoběžné, hrany jsou rozmístěny ve třech navzájem kolmých směrech, každý z těchto je kolmý na dvě vzájemně rovnoběžné stěny. Tyto skutečnosti vyplývají přímo z vlastností čtverce a z umístění tří čtverců u jednoho vrcholu.

3.5.1 Vzorce a odvození

Použijeme opět délku hrany a.

Povrch P je šestinásobkem obsahu stěny $S = a^2$, tedy

$$P = 6a^2.$$

Objem krychle je roven

$$V = a^3.$$

Stěnová úhlopříčka má délku

$$u_s = \sqrt{2}\,a\,.$$

Tělesová úhlopříčka je přeponou nad odvěsnami délek a, u_s a její délku vyjádříme jako

$$u_t = \sqrt{3}\,a\,.$$

Střed krychle je v průsečíku tělesových úhlopříček, současně se v něm střetávají i spojnice středů protilehlých stěn i hran. Poloměry význačných koulí odpovídají polovinám již vytyčených délek. Poloměr koule vepsané je polovinou délky hrany

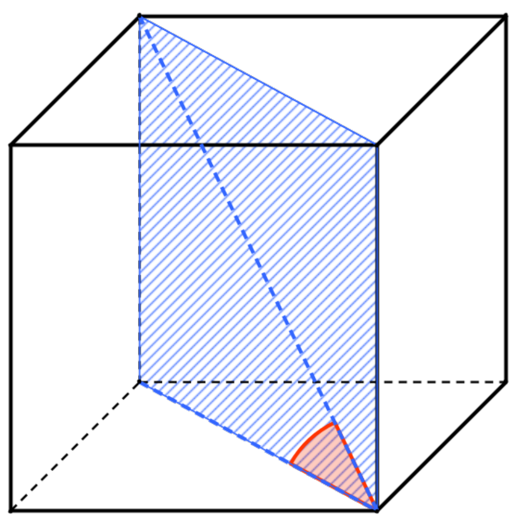
$$r_v = \frac{a}{2},$$

poloměr hranové koule je polovinou délky stěnové úhlopříčky

$$r_h = \frac{\sqrt{2}\,a}{2}$$

a nakonec poloměr opsané koule je polovinou tělesové úhlopříčky

$$r_o = \frac{\sqrt{3}\,a}{2}.$$



Obr. 3.10: Odchylka tělesové úhlopříčky a stěny

Dále určíme odchylku tělesové úhlopříčky od stěny vyjádřenou velikostí úhlu mezi tělesovou a stěnovou úhlopříčkou (obr. 3.10). Jak je vidět, odchylku τ lze vyjádřit pomocí goniometrických funkcí z pravoúhlého trojúhelníku, kde je tělesová úhlopříčka přeponou a odvěsnami jsou hrana a stěnová úhlopříčka. Například je tedy

$$\sin\tau = \frac{a}{\sqrt{3}\,a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tuto hodnotu již známe z oddílu 3.4.1, kde reprezentovala polovinu odchylky dvou stěn čtyřstěnu. Přibližná hodnota odchylky τ tělesové úhlopříčky od stěny je tedy

$$\tau \doteq 35°16'.$$

U středu lze zkoumat odchylku dvou tělesových úhlopříček, kterou není těžké dopočítat ze součtu velikostí úhlů v rovnoramenném trojúhelníku — poloviny úhlopříček tvoří ramena a základnou je hrana. Při základně budou úhly $90° - \tau$. Vychází tedy hodnota 2τ, neboli odchylka dvou stěn čtyřstěnu s přibližnou hodnotou

$$2\tau \doteq 70°32'.$$

3.6 Pravidelný osmistěn

Pravidelný osmistěn má osm trojúhelníkových stěn stýkajících se po čtyřech v šesti vrcholech spojených dvanácti hranami. Dalším jeho názvem je oktaedr, dá se rovněž popsat jako pravidelný trojboký antihranol s pláštěm složeným z rovnostranných trojúhelníků (antihranoly jsou popsány v kapitole 3.9.3). Dobře si ho lze představit jako těleso vzniklé použitím středů stěn krychle jako vrcholů osmistěnu, protože je duálním tělesem krychle, jak bylo uvedeno v podkapitole 3.2. Platón přisoudil osmistěn vzduchu.

Každé čtyři komplanární vrcholy osmistěnu tvoří čtverec — protilehlé hrany jsou tedy rovnoběžné. Aplikací této skutečnosti na dvě dvojice hran zjistíme, že i protilehlé stěny jsou rovnoběžné. Úhlopříčky zmíněného čtverce jsou zároveň tělesovými úhlopříčkami.

3.6.1 Vzorce a odvození

Tradičně označíme délku hrany a.

Stěnou osmistěnu je rovnostranný trojúhelník, jehož výška $v_s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ i obsah $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ jsou stejné jako u čtyřstěnu, povrch je osminásobkem obsahu stěny :

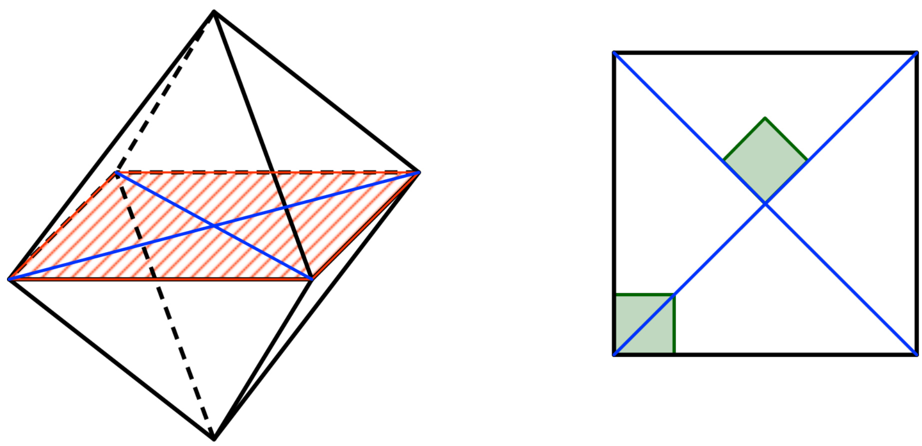
$$P = 2\sqrt{3}\,a^2$$

Tělesová úhlopříčka je úhlopříčkou čtverce se stranou délky a:

$$u_t = \sqrt{2}\,a$$

Objem je dvojnásobkem objemu pravidelného čtyřbokého jehlanu nad základnou s hranami délky a, podle vzorce $V = \frac{1}{3}S_p v_t$, který byl metodou integrace odvozen již v kapitole 3.4.1. Výškou jehlanu je v tomto případě polovina tělesové úhlopříčky u_t:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$



Obr. 3.11: Čtvercový řez vyznačený na osmistěnu s tělesovými úhlopříčkami

Polovina tělesové úhlopříčky, vzdálenost středu a vrcholu, je zároveň poloměrem opsané koule, jehžo velikost je tedy

$$r_o = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a\,.$$

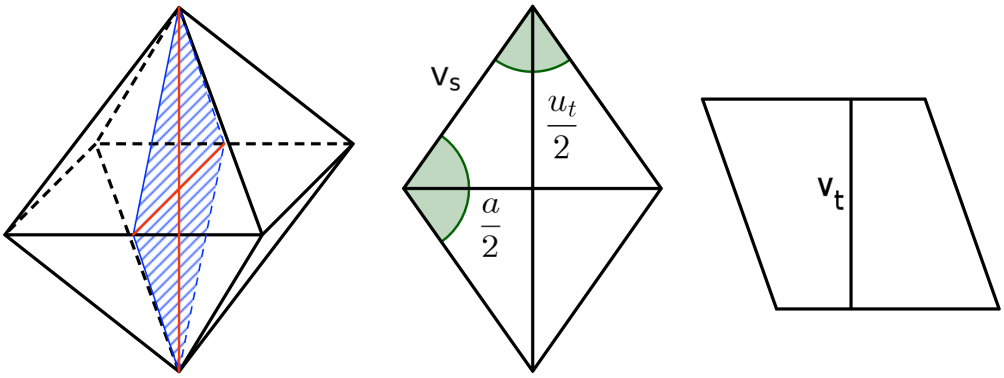
Poloměr hranové koule je velikostí roven polovině délky hrany, jak je patrné na čtvercovém řezu čtyřmi komplanárními vrcholy (obr. 3.11), tedy

$$r_h = \frac{a}{2}.$$

Poloměr vepsané koule lze nejlépe nahlédnout jako polovinu vzdálenosti dvou protilehlých stěn (označme v_t) na řezu vedeném dvěma protějšími vrcholy a dvěma středy hran (obr. 3.12). V tomto kosočtverci se stranami délky $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ a úhlopříčkami délek a a $\sqrt{2}a$ je v_t vzdálenost protilehlých stran. Tu pak není těžké vyjádřit z rovnosti obsahů kosočtverce:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}av_t &= \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 \\ v_t &= \frac{\sqrt{6}}{3}a \end{aligned}$$

$$r_v = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$



Obr. 3.12: Řez vyznačený na osmistěnu a odchylka jeho stěn sousedících hranou (na řezu vlevo) a odchylka protějších stěn u vrcholu (nahoře), vyznačení průměru vepsané koule.

Stěny, které nejsou protilehlé, spolu sousedí buď hranou, nebo přes jeden společný vrchol. V obou případech jsou jejich odchylky v řezu na obr. 3.12. Odchylku dvou stěn sousedících u vrcholu spočteme pomocí sinu její poloviny:

$$\sin\frac{\omega_v}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

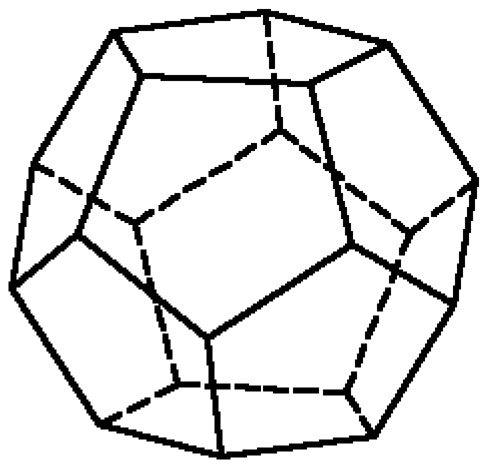
Tato hodnota je nám již dobře známa z krychle i čtyřstěnu a je

$$\omega_v = 70°32'.$$

Z kosočtverce je vidět, že odchylka stěn sousedících hranou bude doplňkem do 180°, což jsme ostatně už počítali v části 3.4.1 jako odchylku hrany od stěny čtyřstěnu. Celá odchylka je tedy

$$\omega_h = 109°28'.$$

3.7 Pravidelný dvanáctistěn



Obr. 3.13: Ukázka pravidelného dvanáctistěnu (vytvořeno pomocí apletu (Fendt, 1998))

Stranami pravidelného dvanáctistěnu jsou pravidelné pětiúhelníky, které se po třech stýkají ve dvaceti vrcholech (jak je vidět na obr.3.13). K pospojování vrcholů je potřeba 30 hran. V literatuře je pro pravidelný dvanáctistěn používán také název dodekaedr. Bůh jej podle Platóna použil při uspořádávání vesmíru.

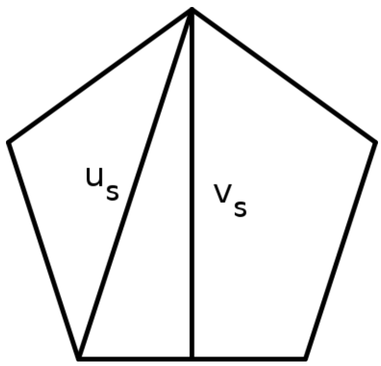
Na rozdíl od těles s menším počtem stěn má dvanáctistěn tělesové úhlopříčky různých délek, také jich má výrazně víc: z každého vrcholu vedou tři hrany a šest stěnových úhlopříček, ke zbývajícím deseti vrcholům tedy vede tělesová úhlopříčka. Jediná z nich prochází středem a vede do protějšího vrcholu, tuto úhlopříčku nazveme hlavní. Úhlopříčky jsou podrobně popsány v části 3.7.1.

Díky pravidelnému uspořádání leží vrcholy po pěti ve čtyřech rovnoběžných rovinách; prostřední dvě roviny dělí těleso na tři části: dva shodné komolé pětiboké jehlany s hranou větší podstavy o délce stěnové úhlopříčky pravidelného dvanáctistěnu a ostatními hranami z původního tělesa, mezi nimi zbývá těleso s dvěma shodnými podstavami — díky vzájemné poloze obou podstav se jedná o antihranol. Navíc mají tyto tři části stejný objem. Důkaz tohoto tvrzení najdeme v části 3.7.4.

3.7.1 Odvození některých vzorců

Z důvodu přehlednosti je odvození některých vzorců platných v pravidelném dvanáctistěnu vyděleno v následujících podkapitolách, přehled odvozených vzorců je zařazen až v části 3.7.2. Délku hrany značíme již tradičně a.

Pravidelný pětiúhelník



Obr. 3.14: Ukázka pravidelného pětiúhelníku

Zatímco vlastnosti stěn předchozích těles — rovnostranného trojúhelníku a čtverce — jsou dobře známé, vlastnosti pětiúhelníku (obr. 3.14) si zaslouží vyčleněný popis alespoň těch částí, které jsou potřeba při odvozování v pravidelném dvanáctistěnu, podrobný popis a další vlastnosti pravidelného pětiúhelníku uvádí (Němec, 2007).

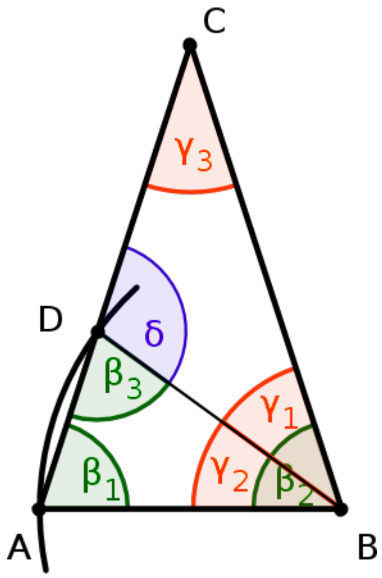
V téměř všech pramenech je informace o zlatém řezu v pětiúhelníku. Důkaz tohoto výskytu ukážeme pomocí zlatého trojúhelníku. Poměr zlatého řezu se tradičně značí φ a nabývá hodnoty $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Známe součet velikostí vnitřních úhlů $n-$úhelníků

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2) \cdot 180^\circ,$$

pro pravidelný pětiúhelník bude tedy platit $5\alpha = 540^\circ$ a u každého vrcholu bude úhel o velikosti

$$\alpha = 108^\circ \, .$$



Obr. 3.15: Zlatý trojúhelník

Nyní si popíšeme výše zmíněný zlatý trojúhelník. Ten je rovnoramenný a základna je větší částí zlatého řezu ramen. Na obr. 3.15 je vidět konstrukce menšího zlatého trojúhelníku nad částí ramene původního zlatého trojúhelníku. Trojúhelník vzniklý nad druhým ramenem je díky zlatému řezu rovnoramenný a ze shodnosti úhlů u jeho základny získáváme $\beta = 2\gamma$ a ze součtu velikostí vnitřních úhlů pak $5\gamma = 180^\circ$. Úhel δ je doplňkovým úhlem k β, a tedy $\delta = 3\gamma$ ve stupních a pak

$$\gamma = 36^\circ \, , \, \beta = 72^\circ \text{ a } \delta = 108^\circ \, .$$

Libovolné dvě sousední strany pětiúhelníku spolu s úhlopříčkou tedy tvoří trojúhelník podobný trojúhelníku BDC z obr. 3.15 podle věty *sus*. Úhlopříčka pětiúhelníku je tedy stranou dělena v poměru zlatého řezu:

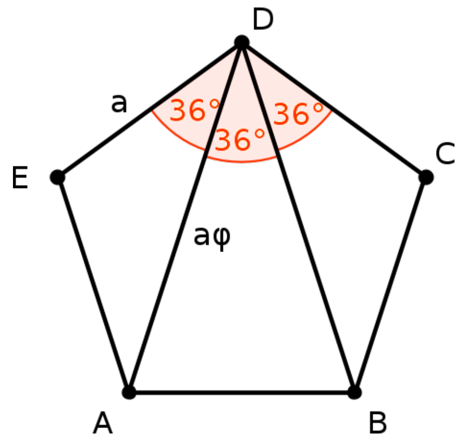
$$u_s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$$

Zároveň můžeme vyjádřit $\cos 72°$. Při použití poloviny zlatého trojúhelníku s jednotkovou základnou má přilehlá odvěsna délku $\frac{1}{2}$ a přepona je délky φ:

$$\cos 72° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Ze vzorce $|\sin\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ získáme

$$\sin 36° = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$



Obr. 3.16: Rozdělení pravidelného pětiúhelníku pro výpočet jeho obsahu

Tím se konečně dostáváme k obsahu pravidelného pětiúhelníku. Třikrát aplikujeme vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ u jednoho vrcholu podle obr. 3.16, kde za ab dosadíme dvakrát $a^2\varphi$ a jednou $(a\varphi)^2$:

$$S_{EAD} = S_{BCD} = \frac{a^2\varphi}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{a^2\varphi}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$S_{ABD} = \frac{a^2\varphi^2}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

Ze všech sčítanců obsahu tedy můžeme vytknout $\frac{a^2}{2}\varphi \sin 36°$:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{a^2\varphi}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \cdot (2+\varphi) = \\
&= \frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \\
&= \frac{a^2}{16\sqrt{2}}\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)^2\left(5+\sqrt{5}\right)^2} = \\
&= \frac{a^2}{16\sqrt{2}}\sqrt{(25-5)\left(6+2\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)} = \\
&= \frac{a^2}{16\sqrt{2}}\sqrt{20\left(40+16\sqrt{5}\right)}
\end{aligned}$$

Odtud už po snadné další úpravě získáme:

$$S = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\,a^2$$

Pro odvození některých vztahů v dvanáctistěnu je potřeba znát také poloměry význačných kružnic pětiúhelníku. Označíme r_5 poloměr opsané kružnice a ϱ_5 poloměr vepsané kružnice, jak je naznačeno na obr. 3.17.

K odvození r_5 poslouží věta o obvodovém a středovém úhlu, díky které známe velikosti úhlů $|\angle BSC| = 72°$ a $|\angle FSB| = 36°$. Protože již známe hodnotu $\sin 36°$, vyjádříme délku r_5 z trojúhelníku FBS:

$$r_5 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}}{10}\,a$$

Poloměr vepsané kružnice pak vyjádříme z Pythagorovy věty z trojúhelníku FBS:

$$\varrho_5 = \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}\,a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{8-\left(5-\sqrt{5}\right)}{5-\sqrt{5}}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{5-\sqrt{5}}}$$

Po dvojím usměrnění je:

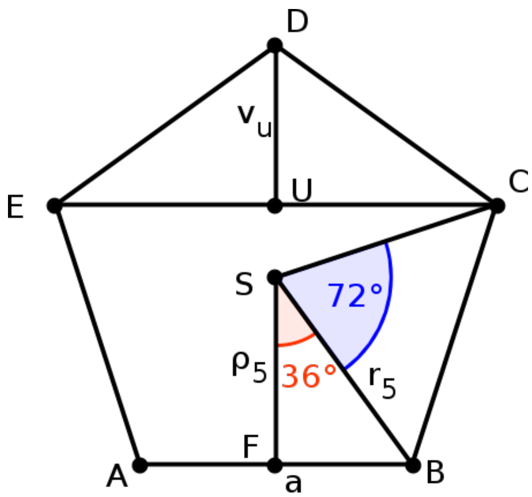
$$\varrho_5 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}\,a$$

Poslední potřebnou vzdáleností z pravidelného pětiúhelníku je vzdálenost vrcholu od úhlopříčky; označíme ji v_u a vyjádříme jako kratší odvěsnu pravoúhlého trojúhelníka CUD

(obr. 3.17):

$$v_u^2 = a^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}a\right)^2 = a^2\left(\frac{16-\left(6+2\sqrt{5}\right)}{16}\right)$$

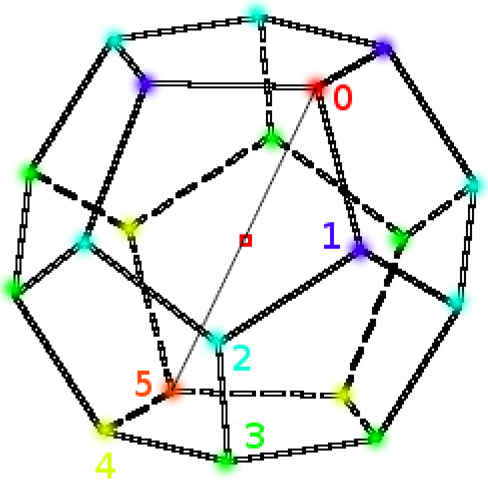
$$v_u = \frac{a}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$



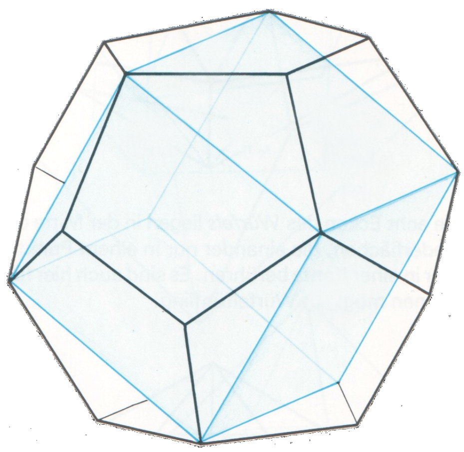
Obr. 3.17: Délka v_u a poloměr kružnice vepsané a opsané pravidelnému pětiúhelníku

Tělesové úhlopříčky

Úhlopříčky pravidelného dvanáctistěnu jsou různých délek, konkrétně tří. To nejlépe prokážeme vzdáleností jednotlivých vrcholů od výchozího vrcholu vyjádřené podle grafové terminologie počtem hran, jak je vyznačeno na obr. 3.18. Sousední vrcholy, vzdálené jednu hranu, jsou pochopitelně spojeny s výchozím vrcholem hranou. S nimi sousední, na obrázku označeny azurovou barvou a číslem 2, náleží stejné stěně jako výchozí vrchol a úsečka k němu je stěnovou úhlopříčkou. Nejkratší tělesová úhlopříčka vede k vrcholům vzdáleným po drátěném modelu tři hrany, proto ji označíme u_3, delší úhlopříčka k jejich o jednu hranu vzdálenějším sousedním vrcholům, kterou označíme u_4. Nejdelší úhlopříčkou je ta, která vede do protějšího vrcholu se vzdáleností pěti hran; označení u_5 by se ale mohlo plést se stěnovou úhlopříčkou u_s, proto hlavní tělesovou úhlopříčku a jedině ji budeme značit u_t.



Obr. 3.18: Dvanáctistěn s vyznačenými vzdálenostmi vrcholů vyjádřenými počtem hran na nejkratší cestě. Podkladový obrázek vytvořen pomocí (Fendt, 1998)



Obr. 3.19: Krychle vepsaná do dvanáctistěnu, převzato z (Adam, Wyss, 1994)

Pro odvození jejich délek je užitečné představit si ve dvanáctistěnu vepsanou krychli (obr. 3.19) s délkou hrany φa. Úhlopříčka dvanáctistěnu u_3 je pak stěnovou úhlopříčkou vepsané krychle a nejdelší u_t je její tělesovou úhlopříčkou a stačí dosadit do vzorců známých z kapitoly 3.5:

$$u_3 = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}a$$

$$u_t = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}a$$

Délku zbývající úhlopříčky u_4 vypočteme pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku se stranami délek a, u_4 a u_t:

$$u_4 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}a\right)^2 - a^2} = \sqrt{\frac{3\left(6+2\sqrt{5}\right)-4}{4}}a = \frac{\sqrt{2\left(7+3\sqrt{5}\right)}}{2}a$$

Že je takový trojúhelník pravoúhlý, není těžké nahlédnout. Dvě protilehlé hrany jsou rovnoběžné, spojnice vytvářející s nimi obdélník jsou délky u_4 a úhlopříčky tohoto obdélníku mají délku u_t. K představě obdélníku může pomoci krychle vepsaná do dvanáctistěnu (na obr.3.19), kde je vidět, že hrany ležící nad protilehlými stěnami krychle tvoří dvě protější stěny obdélníku.

Poloměry význačných koulí

Hlavní tělesová úhlopříčka prochází středem pravidelného dvanáctistěnu a je zároveň průměrem jeho opsané koule; délka jejího poloměru je tedy

$$r_o = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}a.$$

Pomocí Pythagorovy věty získáme poloměr hranové koule:

$$r_h^2 = r_o^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$r_h = \sqrt{\frac{3a^2}{16}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\left(6+2\sqrt{5}\right)-4}{16}}a$$

$$r_h = \frac{\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}}{4}\, a$$

Jinou aplikací Pythagorovy věty získáme poloměr koule vepsané:

$$r_v^2 = r_o^2 - r_5^2 = \frac{3\left(6 + 2\sqrt{5}\right)}{16}\, a^2 - \frac{5 + \sqrt{5}}{10}\, a^2 = \frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}\, a^2$$

$$r_v = \frac{\sqrt{10\left(25 + 11\sqrt{5}\right)}}{20}\, a$$

Objem

Pravidelný dvanáctistěn lze složit z dvanácti jehlanů, ve kterých je jeho stěna jejich podstavou a výškou je poloměr vepsané koule, jeho objem tedy vyjádříme jako dvanáctinásobek objemu pravidelného pětibokého jehlanu s výškou r_v:

$$V = \frac{12}{3} S r_v = 4 \cdot \frac{\sqrt{5\left(5 + 2\sqrt{5}\right)}}{4} \cdot \frac{\sqrt{10\left(25 + 11 \cdot \sqrt{5}\right)}}{20}\, a^3 = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\sqrt{2\left(25 + 11\sqrt{5}\right)}}{4}\, a^3 =$$

$$= \sqrt{2(25 + 11\sqrt{5})(5 + 2\sqrt{5})} \cdot \frac{a^3}{4} = \sqrt{2\left(125 + 55\sqrt{5} + 50\sqrt{5}\right) + 110} \cdot \frac{a^3}{4} =$$

$$= \sqrt{470 + 210\sqrt{5}} \cdot \frac{a^3}{4} = \sqrt{225 + 210\sqrt{5} + 245} \cdot \frac{a^3}{4} = \sqrt{\left(15 + 7\sqrt{5}\right)^2} \cdot \frac{a^3}{4}$$

Finálně tedy:

$$V = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}\, a^3$$

3.7.2 Délky, povrch a objem

Přehledově uvádíme vztahy při hraně délky a, odvození najdeme v předchozích částech.

Délka stěnové úhlopříčky je

$$u_s = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\, a\,.$$

Obsah stěny je

$$S = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4}\, a^2.$$

Povrch tělesa je prostým dvanáctinásobkem obsahu jedné stěny:

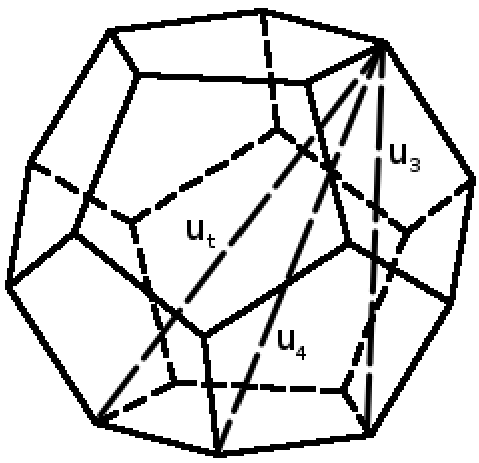
$$P = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\,a^2$$

Tělesové úhlopříčky vyznačené na obr. 3.20 mají délky:

$$u_3 = \frac{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)}{2}\,a$$

$$u_4 = \frac{\sqrt{2\left(7 + 3\sqrt{5}\right)}}{2}\,a$$

$$u_t = \frac{\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{5}\right)}{2}\,a$$



Obr. 3.20: Vyznačené úhlopříčky pravidelného dvanáctistěnu (podkladový obrázek vytvořen pomocí apletu (Fendt, 1998))

Poloměry význačných koulí jsou délek:

$$r_o = \frac{\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{5}\right)}{4}\,a$$

$$r_h = \frac{\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}}{4}\,a$$

$$r_v = \frac{\sqrt{10\left(25 + 11\sqrt{5}\right)}}{20}\,a$$

Výška dvanáctistěnu je průměrem vepsané koule, tedy

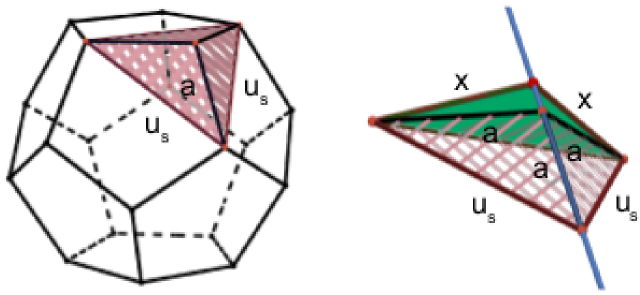
$$v_t = \frac{\sqrt{10\left(25 + 11\sqrt{5}\right)}}{10}\, a.$$

Objem jsme odvodili jako součet objemů dvanácti jehlanů, $V = \frac{12}{3} S r_v$:

$$V = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}\, a^3$$

3.7.3 Odchylky

Odchylku sousedních stěn označíme ω. „Pro odchylku dvou sousedních stěn budeme uvažovat pomocný pravidelný trojboký jehlan odříznutý z pravidelného dvanáctistěnu tak, že hrany podstavy mají délku úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku a boční hrany jsou hrany dvanáctistěnu. Představíme si řez tohoto jehlanu rovinou kolmou k boční hraně a procházející hranou podstavy (obr. 3.21). Řezem je rovnoramenný trojúhelník se základnou délky



Obr. 3.21: Pomocný jehlan a délka x pro výpočet odchylky sousedních stěn, převzato z (Chmelíková, Moravec, 2007)

u_s a rameny délky x.“ (Chmelíková, Moravec, 2007) Ramena tohoto trojúhelníku svírají úhel, jehož velikost je současně odchylkou dvou sousedních stěn. Pro zjištění hodnoty x ji vyjádříme z rovnosti obsahu trojúhelníku v plášti pomocného jehlanu, kde je x výškou k rameni délky a. Výška k základně délky u_s je vzdáleností vrcholu od úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, kterou značíme v_u a její velikost je odvozena v oddílu 3.7.1:

$$\begin{aligned}
\frac{ax}{2} &= \frac{u_s v_u}{2} \\
ax &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} a^2 \\
x &= \frac{a}{8}(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Pro další výpočet se bude hodit zápis

$$x = \frac{u_s}{2} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

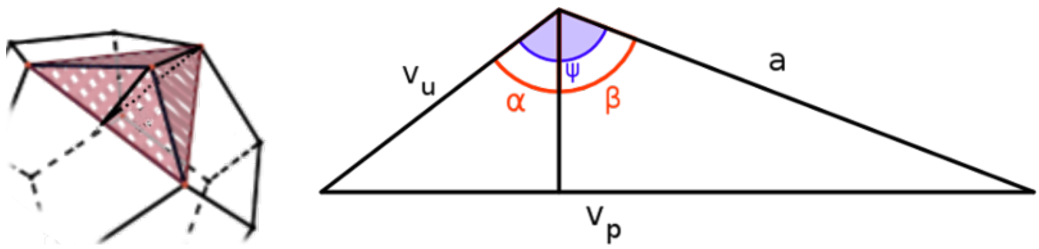
Při znalosti x už můžeme spočítat $\sin \frac{\omega}{2}$, kde x bude přeponou a $\frac{u_s}{2}$ protilehlou odvěsnou:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{\frac{u_s}{2}}{x} = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}}{10}$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{10}$$

Přibližně je tedy úhel $\frac{\omega}{2} \doteq 58°17'$, a odchylka sousedních stěn je tedy

$$\omega \doteq 116°34'.$$



Obr. 3.22: Řez pomocného jehlanu z obr. 3.21 pro výpočet odchylky hrany od stěny

Odchylku ψ hrany od sousední stěny spočítáme pomocí stejného jehlanu, ze kterého vezmeme řez kolmý na základnu (obr. 3.22). Vznikne trojúhelník se stranami délek a, v_u a výškou podstavy v_p původního jehlanu, kterou tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky φa; po dosazení tedy

$$v_p = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4} a.$$

Všimněme si, že tato výška je shodná s poloměrem opsané koule $v_p = r_o$. Známe tedy délky tří stran obecného trojúhelníku a chceme zjistit velikost jednoho z úhlů. Můžeme využít ještě vlastnosti vycházející z původního jehlanu, a sice že kolmý průmět jeho vrcholu dělí výšku — těžnici podstavy v poměru 1 : 2. Výšku jehlanu označíme pro přehlednost jako b. Z trojúhelníků už sice jdou spočítat hodnoty sinu úhlů α a β, ale se znalostí b ,

$$b = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6}a\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3(6+2\sqrt{5})}{36}}\,a = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{12}}\,a,$$

vyjádříme přesně $\sin\psi$ z rovnosti obsahu trojúhelníku počítaného těmito dvěma způsoby:

$$\frac{1}{2}av_u\sin\psi = \frac{1}{2}v_p b$$

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{12}}\cdot\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}a^2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$\sin\psi = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

nebo po usměrnění

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{10}$$

S vědomím, že je úhel tupý, získáme

$$\psi \doteq 121°43'.$$

Odchylka τ hlavních tělesových úhlopříček je rovna velikosti vrcholového úhlu rovnoramenného trojúhelníku s rameny délek r_o a základnou o délce a. (Chmelíková, Moravec, 2007) Z již známých hodnot tedy spočteme

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{a}{2r_o} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})},$$

po úpravě a usměrnění

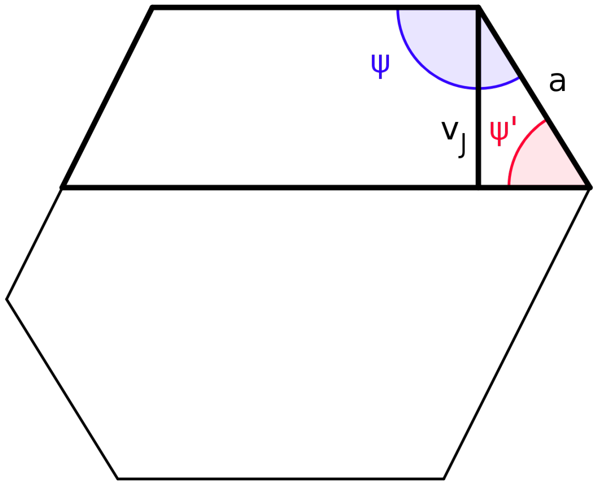
$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{6},$$

z čehož získáváme přibližnou hodnotu $\frac{\tau}{2} \doteq 20°54'$ a odchylka dvou úhlopříček je po zaokrohlení

$$\tau \doteq 41°49'.$$

3.7.4 Třetiny objemu

Jak bylo avizováno, dokážeme, že dvanáctistěn je rovinami jeho vrcholů rozdělen na tři tělesa (z toho dva shodné komolé jehlany a jeden pravidelný pětiboký antihranol) se stejným objemem. Na to stačí dokázat, že objem jednoho komolého jehlanu je třetina objemu dvanáctistěnu. Známe $\sin\psi = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$, což můžeme použít pro vyjádření výšky komolého



Obr. 3.23: Řez dvanáctistěnu s vyznačeným řezem komolého jehlanu. Je zřejmé že oba vyznačené úhly mají stejný sinus

jehlanu v_J v závislosti na délce hrany a. Když $\sin\psi' = \frac{v_J}{a}$ (obr. 3.23), potom

$$v_J = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,a$$

Tuto hodnotu stačí dosadit do vzorce pro komolý jehlan $V = \frac{1}{3}v_j\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$ společně s hodnotou $S_1 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\,a^2$ pro obsah menší podstavy a pro obsah větší podstavy $S_2 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 a^2$. Povšimněme si, že se obsahy liší jen o činitel $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, schválně ponechaný ve druhé mocnině. Objem komolého jehlanu je tedy

$$
\begin{aligned}
V_J = {} & \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}a\cdot \\
& \cdot\left[\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2+\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2a^2+\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}a^2\right]= \\
= {} & \frac{a^3}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left[1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]= \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\cdot\frac{2+\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}= \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)\left(10-2\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)^2}}{10-2\sqrt{5}}= \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{5\left(50-10\sqrt{5}+20\sqrt{5}-20\right)\left(14+6\sqrt{5}\right)\left(10+2\sqrt{5}\right)^2}}{100-20}= \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{50\left(3+\sqrt{5}\right)\left(14+6\sqrt{5}\right)\left(100+40\sqrt{5}+20\right)}}{80}= \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{2\,000\left(3+\sqrt{5}\right)\left(14+6\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}}{80}= \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{2\,000\left(14+6\sqrt{5}\right)^2}}{80}=\frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{2\,000\left(196+168\sqrt{5}+180\right)}}{80}= \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{2\,000\left(8\cdot 47+8\cdot 21\sqrt{5}\right)}}{80}=\frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{1\,600\left(470+210\sqrt{5}\right)}}{80},
\end{aligned}
$$

ale závorku, která je v čitateli pod odmocninou, už známe z výpočtu objemu dvanáctistěnu, proto

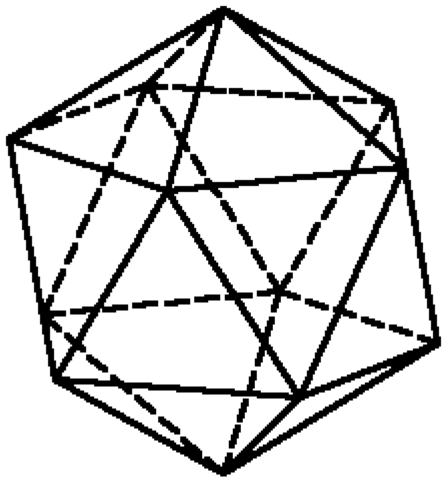
$$V_J=\frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{\left(15+7\sqrt{5}\right)^2}}{2}$$

a po snadné finální úpravě získáme

$$V_J=\frac{15+7\sqrt{5}}{12}a^3.$$

Pro připomenutí objem dvanáctistěnu je $V=\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$, takže poměr $\frac{V_J}{V}=\frac{1}{3}$ dokazující původní tvrzení je už snadno vidět.

3.8 Pravidelný dvacetistěn



Obr. 3.24: Ukázka pravidelného dvacetistěnu (vytvořeno pomocí apletu (Fendt, 1998))

Zbývajícím platónským tělesem je pravidelný dvacetistěn (obr. 3.24), jehož dvacet trojúhelníkových stěn se stýká po pěti ve dvanácti vrcholech a má třicet hran. Pro Platóna představoval vodu.

Libovolný vrchol tvoří s pěti sousedními vrcholy pravidelný pětiboký jehlan; tento jehlan budeme v kontextu dvacetistěnu nazývat vrcholový. Odebereme-li dva protější vrcholové jehlany, těleso, které zůstane, se nazývá antihranol, v tomto případě navíc pravidelný s pláštěm složeným z rovnostranných rojúhelníků.

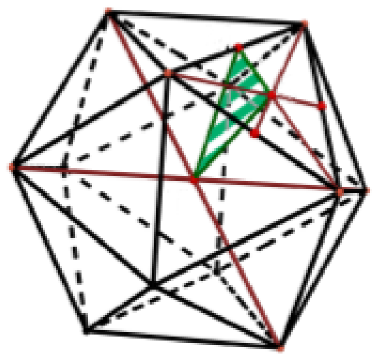
Z každého vrcholu pravidelného dvacetistěnu vychází šest úhlopříček, z toho jedna hlavní do protějšího vrcholu a ostatní do pěti vrcholů s ním sousedících.

3.8.1 Vzorce a odvození

Délku hrany značíme opět a.

Trojúhelníkové stěny mají výšku $v_s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ a obsah $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, známé již z předchozích těles. Povrch je dvacetinásobkem obsahu jedné stěny:

$$P = 5\sqrt{3}a^2$$



Obr. 3.25: Pravoúhlý trojúhelník s vrcholy ve středu dvacetistěnu, středu stěny a středu hrany, převzato z (Chmelíková, Moravec, 2007)

Poloměry význačných koulí budeme tentokrát odvozovat od hranové koule při využití odchylky sousedních stěn ω odvozené až v následující podkapitole 3.8.1 tak, jako v (Chmelíková, Moravec, 2007).

Představme si trojúhelník s těmito vrcholy: střed dvacetistěnu, střed libovolné stěny a střed některé její hrany, tak jako je na obr. 3.25. V něm známe jednu stranu a jí připsané úhly – tou stranou je třetina stěnové výšky, u středu stěny je pravý úhel a u středu hrany je úhel polovinou velikosti odchylky dvou stěn $\frac{\omega}{2}$. Pro tento úhel je dále odvozena hodnota $\sin\frac{\omega}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$, a můžeme tedy dvěma způsoby vyjádřit kosinus:

$$\sqrt{1-\sin^2\frac{\omega}{2}} = \cos\frac{\omega}{2} = \frac{v_s}{3r_h}$$

Odtud vyjádříme poloměr hranové koule

$$r_h = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{5}}{12}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}}\,a = \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}\,a,$$

po usměrnění je

$$r_h = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}\,a\,.$$

Podle Pythagorovy věty aplikované na stejný trojúhelník dopočítáme poloměr koule vepsané a současně polovinu tělesové výšky

$$r_v = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}-\frac{1}{12}}\,a = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}-4}}{4\sqrt{3}}\,a = \frac{\sqrt{9+6\sqrt{5}+5}}{4\sqrt{3}}\,a,$$

po úpravě je

$$r_v = \frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}\, a.$$

Podobně vypočítáme i poloměr opsané koule jako délku přepony v trojúhelníku s odvěsnami r_h a $\frac{a}{2}$

$$r_o = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\, a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, a,$$

případně

$$r_o = \frac{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}\, a.$$

Délka hlavní tělesové úhlopříčky je dvojnásobkem tohoto poloměru:

$$u_t = \frac{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{2}\, a$$

Kratší tělesové úhlopříčky ve dvacetistěnu jsou úhlopříčkami podstavy vrcholového jehlanu a mají délku

$$u_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, a.$$

Výška vrcholového jehlanu v_J je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku, ve kterém je druhou odvěsnou poloměr kružnice opsané základně tohoto jehlanu, pravidelnému pětiúhelníku, o velikosti $r_5 = \frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}}{10}\, a$ a přeponou je hrana délky a. Z Pythagorovy věty získáme

$$v_J = \sqrt{a^2 - \frac{10\left(5+\sqrt{5}\right)}{100}\, a^2},$$

po úpravě

$$v_J = \frac{\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}}{10}\, a.$$

Objem pravidelného dvacetistěnu je dvacetinásobkem objemu pravidelného trojbokého jehlanu s hranou podstavy o délce a a výšce r_v (Chmelíková, Moravec, 2007):

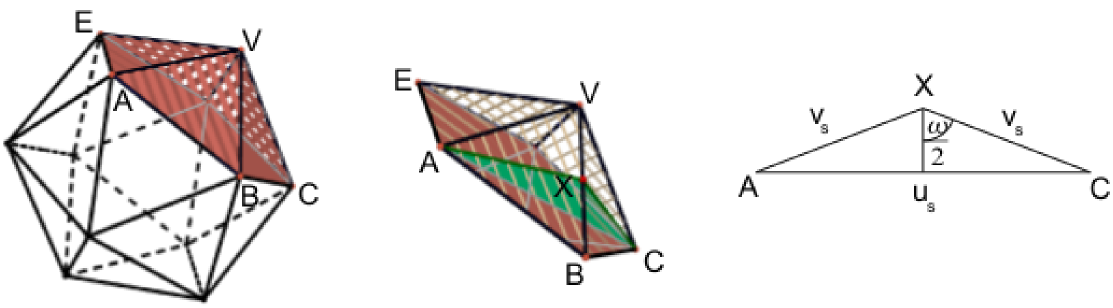
$$\begin{aligned}
V &= \frac{12}{3} S r_v \\
V &= \frac{12}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12} a \\
V &= \frac{3+\sqrt{5}}{4} a^3
\end{aligned}$$

Odvození odchylek je převzato z (Chmelíková, Moravec, 2007). Odchylku dvou sousedních stěn nejlépe nahlédneme na řezu vrcholového jehlanu na obr. 3.26. Bude nás zajímat úhel u hlavního vrcholu rovnoramenného trojúhelníku s rameny délky rovné stěnové výšce $v_s = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ a základnou o délce úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku $u_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} a$. Snadno tedy vyjádříme sinus polovičního úhlu

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4} a}{\frac{\sqrt{3}}{2} a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},$$

z čehož zjistíme přibližnou hodnotu

$$\frac{\omega}{2} \doteq 69°05' \quad \text{a} \quad \omega \doteq 138°11'.$$



Obr. 3.26: Vrcholový jehlan a jeho řez pro výpočet odchylky sousedních stěn, převzato z (Chmelíková, Moravec, 2007)

Odchylku hlavních tělesových úhlopříček u středu pravidelného dvacetistěnu spočítáme obdobně jako u dvanáctistěnu pomocí rovnoramenného trojúhelníku nad libovolnou hranou s hlavním vrcholem ve středu dvacetistěnu. Potom je

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a} = \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{2\left(5+\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{20} = \frac{\sqrt{40\left(5-\sqrt{5}\right)}}{20},$$

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}}{10},$$

z čehož vychází přibližné hodnoty úhlů:

$$\frac{\tau}{2} \doteq 21°43' \quad \text{a} \quad \tau \doteq 63°26'$$

3.9 Související tělesa

To bylo pět platónských těles, které splnily přísné požadavky pravidelnosti ve smyslu vrcholů hran i stěn a zároveň požadavek na konvexitu. Je jistě užitečné alespoň zmínit tělesa, která nesplňují některý z těchto požadavků; často jsou totiž ze zcela pravidelných mnohostěnů odvozená. Tato kapitola nemá ambici přesného popisu, je spíše přehledovým seznamem; napřed si představíme nekonvexní pravidelné mnohostěny, dále tělesa polopravidelná, jejichž stěny jsou různé pravidelné mnohoúhelníky. Na závěr ještě zmíníme mnohostěny, které mají všechny stěny shodné, ale stýkají se v jednotlivých vrcholech v různém počtu.

3.9.1 Kepler-Poinsotova tělesa

Kepler-Poinsotova tělesa je souhrnné označení pro čtyři pravidelné nekonvexní mnohostěny (obr. 3.27). Jedním ze způsobů, jak je vytvořit, je použití vrcholů dvanáctistěnu nebo dvacetistěnu a mezi nimi stanovit jiné stěny. Tento postup se obecně nazývá fasetace. Fasetací krychle například dosáhneme dvou prolínajících se čtyřstěnů. (Sutton, 2011)

Keplerova tělesa

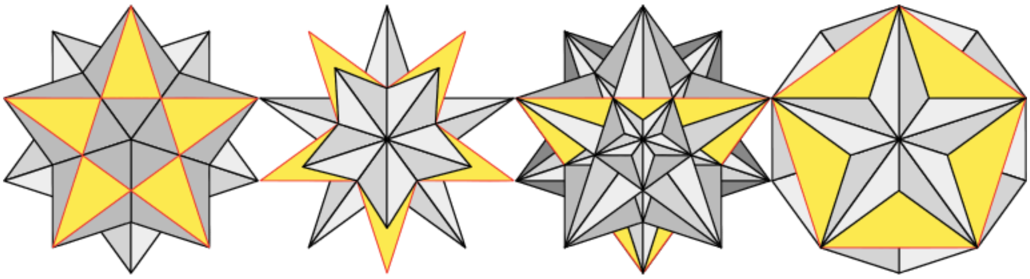
Stěny Keplerových těles tvoří pravidelné pentagramy (Schläfliho symbol $\{\frac{5}{2}\}$), které jsou cípy k sobě připojeny ve vrcholech, jak je dobře vidět na 3.27, kde jsou u jednotlivých těles vyznačeny viditelné části vybrané stěny. Ostatní body, kde se protínají hrany, nejsou vrcholy stejně jako u pentagramu. Taková tělesa jsou dvě a jejich názvy jsou malý hvězdicový dvanáctistěn reprezentovaný symbolem $\{\frac{5}{2}, 5\}$ a velký hvězdicový dvanáctistěn se symbolem $\{\frac{5}{2}, 3\}$.

Vizuálně vypadají tato tělesa stejně jako dvanáctistěn (respektive dvacetistěn), kterým byl ke každé stěně připsán pravidelný pětiboký (respektive tříboký) jehlan. Tento popis může lépe přiblížit podobu těles, ale vzdaluje se od ideje jejich vzniku. Kepler je možná proto nazval větší a menší dvacetistěnný ježek; některé další vlastnosti najdete v tabulce 3.1.

Klasickým způsobem konstrukce Keplerových těles, kterou použil i Kepler (Sutton, 2011), je prodlužování hran platónského tělesa. Z mnohoúhelníků použitých při konstrukci pravidelných mnohostěnů se jedině strany pětiúhelníku při protažení znovu protnou a vytvoří již zmíněný pentagram (pentagram tvoří také úhlopříčky pětiúhelníku, čehož využívá pro konstrukci Keplerových těles facetace). První pětiúhelník, jehož strany jsou protaženy, je stěna dvanáctistěnu – nad každou stěnou pomyslně vznikne pětiboký jehlan, vzniklé pentagramy utvoří malý hvězdicový dvanáctistěn. Pro velký hvězdicový dvanáctistěn jsou protaženy hrany dvacetistěnu, kdy výchozí pětiúhelník je vždy podstavou vrcholového jehlanu (popsán v kapitole 3.8).

Poinsotova tělesa

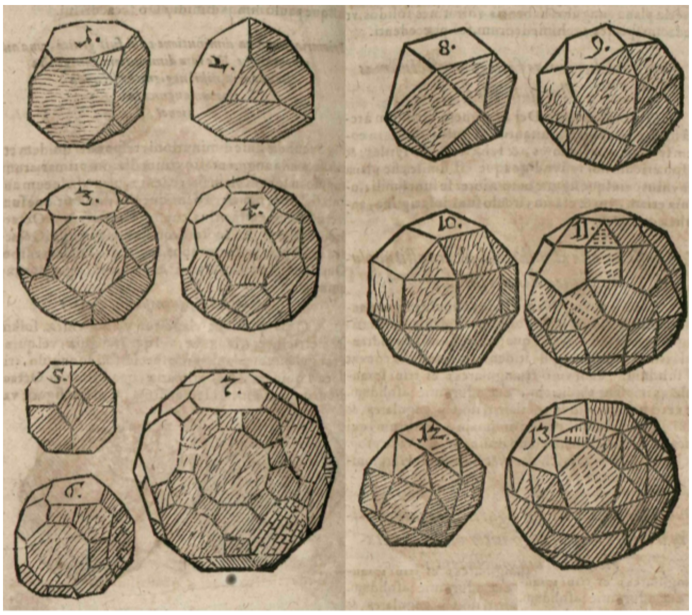
Stěny dvou Poinsotových těles jsou běžné konvexní mnohoúhelníky – trojúhelník a pětiúhelník a vznikají facetací dvacetistěnu a opět platí, že vrcholy jsou jen krajní body hran a navíc ani každý průnik dvou stěn není hrana (obr. 3.27). Jmenují se velký dvacetistěn (Schläfliho symbol $\{3, \frac{5}{2}\}$) a velký dvanáctistěn ($\{5, \frac{5}{2}\}$). V obou případech mají stejnou stěnu jako „malé“, platónské, těleso a jsou duální ke Keplerovým tělesům.



Obr. 3.27: Kepler-Poinsotova tělesa: zleva malý a velký hvězdicový dvanáctistěn, velký dvacetistěn a velký dvanáctistěn, převzato z (Wikimedia obrázky)

Náročně je lze sestrojit i zvětšováním stěn, což popíšeme na příkladu dvanáctistěnu. Pokud z dvanáctistěnu uděláme protažením hran do pentagramu Keplerův malý hvězdicový dvanáctistěn, nové vrcholy můžeme spojit také do pětiúhelníků, které tvoří právě stěny velkého dvanáctistěnu. U dvacetistěnu je tato představa horší, může jí pomoci Baravalleova hvězda (její popis je v části 3.9.5).

3.9.2 Archimédova tělesa



Obr. 3.28: Keplerův nákres všech Archimédových těles, převzato z (Svobodová, 2006)

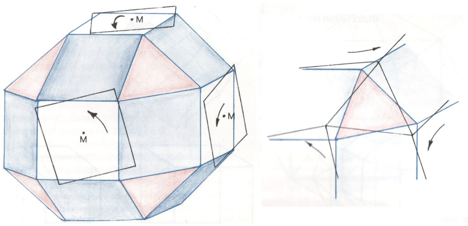
Archimédova tělesa, někdy také archimedovská, splňují konvexitu, shodnost hran a dokonce i ekvivalenci vrcholů, jediná odlišnost od platónských těles je, že jejich stěny tvoří různé pravidelné n-úhelníky (vždy však u každého vrcholu zastoupeny ve stejném počtu i pořadí). Jejich české názvosloví není úplně ustálené. Poprvé popsal těchto třináct těles ve svých spisech Archimédes (přibližně 287 – 212 př.n.l), ale tyto spisy se nedochovaly a pro Evropu byla Archimédova tělesa postupně znovu objevena v průběhu renesance a všechna popsána v Keplerově *Harmonices Mundi* (1620) (obr. 3.28). (Sutton, 2011)

Všechna tato tělesa lze postupně odvodit z platónských těles. První skupinu tvoří osekaná platónská tělesa (čísla 1 až 5). Osekání znamená oříznutí rohu tak, aby stěny tvořily pravidelný n-úhelník s dvojnásobným počtem vrcholů. Oříznutím vzniká také nová stěna pod původním vrcholem, rovněž pravidelný n-úhelník a počet jejích vrcholů je roven počtu hran vycházejících z vrcholu původního platónského tělesa.

Jiná dvě archimedovská tělesa jsou tvořena průnikem dvou duálních těles při ztotožnění středů hran – vznikají tedy podobně jako dvojtělesa v kapitole 3.2. Novými vrcholy jsou středy hran původních těles. I jméno kombinuje jména původní duální dvojice: jmenují se kuboktaedr (č. 8) a ikosododekaedr (č. 9). Kuboktaedr je kombinací krychle a osmistěnu, má proto šest čtvercových a osm trojúhelníkových stěn. Vrcholy ikosododekaedru tvoří poloviny hran dvacetistěnu nebo dvanáctistěnu a má dvanáct pětiúhelníkových a dvacet trojúhelníkových stěn.

Další metodou utváření archimedovských těles je „nafukování“, kdy se stěny od sebe odsunují tak, aby se vrcholy vzdálily na délku hrany, neboli hrany jsou nahrazeny čtverci a vrcholy jsou nahrazeny stěnami duálního tělesa. Nafukováním krychle nebo osmistěnu vznikne rombokuboktaedr a z druhé dvojice duálních platónských těles vznikne romboikosododekaedr (čísla 10 a 11), někdy se tato tělesa nazývají také rombická krychle a rombický dodekaedr. Nafukováním čtyřstěnu vznikne s šesti čtvercovými a osmi trojúhelníkovými stěnami kuboktaedr. Rozestupovat se mohou i stěny osekaných těles, vždy ty s největším počtem vrcholů. Z výchozího platónského tělesa vznikne stejné těleso nezávisle na volbě z původní duální dvojice. Vznikne velký rombokuboktaedr a velký romboikosododekaedr (čísla 6 a 7).

Do avizovaných třinácti zbývají dvě. Jsou odvozená od „malých“ rombických těles zkroucením (obr. 3.29) tak, že čtverce jsou nahrazeny dvojicí rovnostranných trojúhelníků. Náleží jim přídavné jméno „otupené“ nebo „přitlačené“ namísto „rombické“; česky tedy otupená krychle (č. 12) a otupený dvanáctistěn (č. 13). (Sutton, 2011)



Obr. 3.29: Zkroucení rombokuboktaedru, převzato z (Adam, Wyss, 1994)

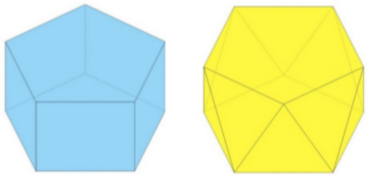
Je dobré poukázat, že představené metody utváření těles mohou transformovat také platónská tělesa mezi sebou, použití středů hran jako vrcholů nového tělesa je také metodou vepsání osmistěnu do čtyřstěnu, podle terminologie archimedovských těles by se osmistěn mohl nazývat podle vzoru kuboktaedru tetrotetraedr. Dvacetistěn zase vzniká z čtyřstěnu přitlačením (Svět těles).

3.9.3 Hranoly a antihranoly

Z rovinných pravidelných n-úhelníků není těžké udělat těleso, které má všechny hrany stejně dlouhé a splňuje i ostatní požadavky archimedovských těles, vztyčením čtverce nad každou stranou a uzavřením druhým shodným n-úhelníkem – neboli vytvořit hranol s pravidelnou základnou a pláštěm složeným ze čtverců, v odborné literatuře lze najít také název prizma.

Druhý způsob, jak konvexně spojit dva rovnoběžné n-úhelníky, je pomocí trojúhelníků. Při vhodném vzájemném pootočení a vzdálenosti n-úhelníků mohou být spojující trojúhelníky rovnostranné. Takové těleso má tedy u každého vrcholu jeden n-úhelník a tři trojúhelníky a jmenuje se antihranol nebo antiprizma (obr. 3.30).

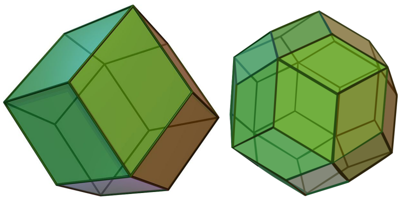
Archimédes do svého výčtu ale nezařadil hranoly ani antihranoly, naopak Kepler je v *Harmonices Mundi* zmiňuje, ale odděleně (Svobodová, 2006). Dnes se hranoly, antihranoly a Archimédova tělesa souhrnně označují jako polopravidelná. Na první pohled je



Obr. 3.30: Ukázka hranolu a antihranolum, převzato z (Vytisková, 2009)

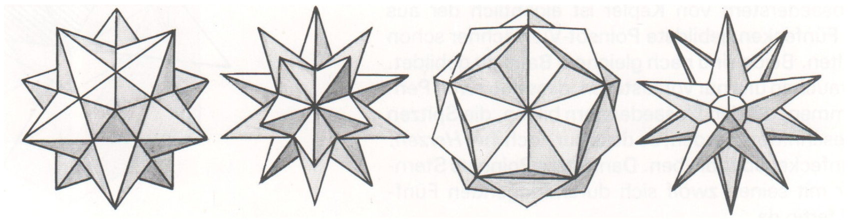
zřejmé, že krychle je zástupcem takovýchto hranolů mezi platónskými tělesy. Na druhý pohled je také vidět, že osmistěn lze popsat jako trojboký antihranol.

3.9.4 Kosočtverečné mnohostěny



Obr. 3.31: Kosočtverečný dvanáctistěn a třicetistěn, převzato z (Wikimedia obrázky)

V *Harmonices mundi* si Kepler také povšiml možnosti připsat hranám krychle a dvanáctistěnu kosočtverce tak, aby utvořily nové těleso. V případě krychle vzniká kosočtverečný dvanáctistěn a v případě dvanáctistěnu kosočtverečný třicetistěn (obr. 3.31). Kromě toho, že kosočtverec není úplně pravidelný čtyřúhelník, porušují tato tělesa i další podmínku pravidelnosti – mají dva typy vrcholů: jeden ve vrcholech původního tělesa, kde se stýkají vždy tři kosočtverce tupými úhly k sobě, druhý nad stěnami původního tělesa, kde se stýká čtyři nebo pět ostrých úhlů kosočtverce. U osmistěnu a dvacetistěnu jdou kosočtverce připsat jen delší úhlopříčkou na hranu a vznikají tedy znovu stejná tělesa – vrcholy kosočtverečných mnohostěnů jsou tedy tvořeny také vnějšími vrcholy dvojtěles (popsaných v kapitole 3.2) (Adam, Wyss, 1994). Čtyřstěnu lze stejným způsobem připsat čtverec a vzniká krychle.



Obr. 3.32: Zleva malý a velký hvězdicový dvanáctistěn, Bindelův a Baravallův ježek, převzato z (Adam, Wyss, 1994)

3.9.5 Další ježci

Kromě Keplerových hvězdicových mnohostěnů existují další hvězdicovitá tělesa odvozená z dvacetistěnu (obr. 3.32). Zde už je představa připsaných jehlanů žádoucí, přehled vlastností ježků najdeme v tabulce 3.1. Další dva ježci nevychází při zvětšování stěn z prodlužování hran, ale z prodlužování výšek přes hranu. Jednodušší Bindelův ježek (na obr. 3.32 druhý zprava) je založen na dvacetistěnu a nové vrcholy konstruuje nad každou ze stěn prodloužením výšek tří stěn sousedících hranou. Protože jsou takto prodlouženy všechny výšky, z každé stěny se stane šestiúhelník.

Druhý je Baravallův ježek (obr. 3.32, zcela vpravo), který prodlužuje výšky trojúhelníků sousedících hranou s vrcholovým jehlanem. U vrcholu je tedy každý osten pětiboký jehlan. Tyto jehlany jsou připsány podstavám vrcholových jehlanů a pronikají se i mimo výchozí dvacetistěn. Každý nový vrchol je na ose středu dvacetistěnu a jednoho původního vrcholu, proto jsou jeho vnější vrcholy uspořádáy ve dvacetistěnu. Z obou těchto ježků nalezneme v českém literatuře pouze Baravallova ježka na stránkách (svět těles) pod názvem „velký deltoidový šedesátistěn“. Používaná terminologie je překladem z (Adam, Wyss, 1994).

[1] Baravallův ježek má dva druhy vnitřních vrcholů: „nad hranou“, kde se stýkají čtyři stěny (30) a „nad stěnou“, kde se stýkají tři stěny (20).

	Malý hvězdicový dvanáctistěn	Velký hvězdicový dvanáctistěn	Bindelův ježek	Baravallův ježek
Výchozí těleso Konstrukce prodloužením	dvanáctistěn hran	dvacetistěn hran	dvacetistěn výšek	dvacetistěn výšek
Počet stěn Počet vrcholů (včetně vnitřních) Počet hran (podle délek)	60 12 32 90 (30 + 60)	60 20 32 90 (30 + 60)	60 20 32 90 (30 + 60)	60 12 62 (20+30+12)[1] 120 (60 + 60)
Poměr velikostí hran v připsaných jehlanech	zlatý řez $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	zlatý řez $\varphi \doteq 1,618$	$s =$ hrana pláště $s = k\frac{\sqrt{10}}{5} \doteq 0,632k$ $k = s\frac{\sqrt{10}}{2} \doteq 1,581s$	$k =$ hrana 20stěnu $s = \frac{k}{2}\sqrt{2}\left(2+\sqrt{5}\right)$ $s \doteq 2,995k$
Jádro (těleso vnitřních vrcholů) Obal (těleso vnějších vrcholů)	dvanáctistěn dvacetistěn	dvacetistěn dvanáctistěn	dvacetistěn pentakisdodekaedr	nemá dvacetistěn

Tabulka 3.1: Tabulka hvězdicovitých těles (Adam, Wyss, 1994, str. 95)

Kapitola 4

Výzkum

Výzkum žákovského pojetí pravidelnosti jsme provedli ve třech stádiích: dotazník mezi učiteli a studenty učitelství, analýza učebnic a dotazníkové šetření směřované na žáky na konci devátého ročníku základní školy. První dvě části předcházely tvorbě hypotéz pro samotný výzkum. Jejich podrobný popis je v podkapitolách 4.2 a 4.3.

4.1 Hypotézy

Prvotní otázkou bylo, zda žáci vnímají pravidelnost jako kategorii. Zda je pro ně pravidelný šestiúhelník bližší s pravidelným čtyřstěnem nebo například nepravidelným šestiúhelníkem. Jestli žáci poznávají objekty, zejména mnohoúhelníky jako pravidelné, nebo dávají přednost jiným vlastnostem, které vnímají jako důležitější.

Druhou otázkou bylo propojení pravidelnosti geometrických objektů a posloupností, které jsme vybrali ze zbylých matematických disciplín jako nejvhodnější z důvodu jejich znalosti na straně žáků. Na základě analýzy učebnic druhého stupně jsme zkonkretizovali hypotézy.

Hypotéza 1

Žáci vnímají odděleně pravidelnost v rovině a v prostoru.

Hypotéza 2

V geometrii bude pro žáky pravidelnost méně určující než vlastnosti, na které je v učebnicích druhého stupně kladen větší důraz: osová a středová souměrnost, pravoúhlost.

Hypotéza 3

Žáci nevnímají spojitost mezi číselnou a geometrickou pravidelností.

Hypotéza 4

Žáci s větší oblibou matematiky a s lepším prospěchem v matematice budou pravidelnost vnímat více než žáci s horším prospěchem a menší oblibou matematiky.

Komentář k hypotézám

Propojení pravidelných mnohoúhelníků a mnohostěnů jsme neočekávali zejména z toho důvodu, že pravidelné mnohostěny nejsou v používaných učebnicích nijak akcentovány, pravidelnost je v prostoru reprezentována jen pravidelnými jehlany a hranoly, jejichž speciálními případy jsou čtyřstěn a krychle. Osmistěn se ale v učebnicích nevyskytuje.

Vnímání ze strany souměrností je problematické především z toho důvodu, že objekty jsou pravidelné, proto jsou také osově, případně i středově, souměrné, u čtverce se díky tomu, že je pravidelný, vyskytuje pravý úhel. Vnímání pouze souměrnosti je pohled bez hlubšího porozumění. Podobně jako u Pythagorovy věty jsou samozřejmě podmínky souměrností s pravidelností n-úhelníku ekvivalentní, ale jeden směr je dominantní v tom smyslu, že pravidelný n-úhelník stejně jako pravoúhlý trojúhelník jsou platónskou ideou, pro kterou poznáváme vlastnosti. Vnímání symetrií je na úrovni izolovaných modelů, zatímco vnímání pravidelnosti je na úrovni abstraktního myšlení.

Třetí hypotéza vychází zejména z pozorování, že kapitoly geometrie jsou od ostatních matematických disciplín důsledně oddělovány — některé řady učebnic jsou dokonce rozděleny na geometrii a „ostatní“ (název druhé učebnice se podle ročníku liší), například (Binterová a kol., 2007 – 2010).

Čtvrtá hypotéza je založena na přesvědčení, že vnímání pravidelnosti svědčí o kvalitnější poznatkové struktuře na straně žáka, což by mělo souviset i se studijními úspěchy žáků a odrážet se v oblíbenosti matematiky.

4.2 Dotazník pro učitele a studenty učitelství

Dotazník pro učitele a studenty učitelství byl sestaven za účelem zjistit, jaký náhled na pravidelnost mají učitelé a připravující se učitelé, jaké jsou jejich zkušenosti s vnímáním pravidelnosti na straně žáků a s výskytem pravidelnosti v učebnicích. Dotazníkové šetření probíhalo online formou na platformě Formuláře Google, jeho textová verze je přiložena v příloze 1. V zájmu zkrácení doby nutné k vyplnění dotazníku byly téměř všechny otázky formulované jako uzavřené, zároveň byly ale vždy doplněny o možnost dalšího vyjádření respondentů.

Identifikační otázky byly zaměřeny zejména na typ a délku praxe učitele. Zúčastnili se čtyři ženy a dva muži s praxí do pěti let, ve čtyřech případech kratší než jeden rok. Čtyři respondenti nabyli svoji praxi na základních školách a víceletých gymnáziích, zbývající dva na střední škole.

V odpovědích na otázku na příklady pravidelných matematických objektů se mezi odpověďmi kromě pravidelných mnohoúhelníků a mnohostěnů vyskytly také graf funkce sinus, konstantní funkce, obdélník a vícekrát kružnice nebo kruh.

Z vybraných matematických disciplín (matematická analýza, algebra, geometrie, aritmetika, kombinatorika) s pravidelností podle všech respondentů úzce souvisí a zabývá se mimo jiné pravidelnými objekty pouze geometrie. I ostatní disciplíny ale byly alespoň dvěma respondenty označeny jako úzce související. Jako zcela nesouvisející označil pouze jeden respondent algebru. Jeden respondent označil úzkou souvislost u všech disciplín, jeden pouze u geometrie a u ostatních volil střední variantu okrajové souvislosti. Celé znění možností bylo následující:

- „Úzce souvisí - mimo jiné přímo zkoumá pravidelné objekty“,

- „Souvisí jen okrajově — pravidelnost se objevuje v některých úlohách“,
- „S pravidelností nesouvisí“.

Mezi pojmy souvisejícími s pravidelností (předvybrány byly pojmy, které charakterizují pravidelné objekty, setkali jsme se s nimi v rámci přípravy bakalářské práce, nebo se v jejich souvislosti používají pravidelné objekty — konkrétně to byly následující pojmy: souměrnost, stejnolehlost, fraktál, posloupnost, permutace, graf — ve smyslu teorie grafů, funkce) byl pro respondenty nejvíce (pro 5 respondentů velmi) související fraktál a Sierpińského koberec byl jedním z dopsaných souvisejících pojmů. Pro 3 respondenty byly velmi souvisejícími pojmy souměrnost a posloupnost, naopak funkce byla pro všechny respondenty související pouze „možná trochu“, pro čtyři respondenty s pravidelností nesouvisí stejnolehlost a pro zbývající jen „možná trochu“. Graf ve smyslu teorie grafů jako jediný rozdělil respondenty a mezi odpověďmi byla protichůdná tvrzení: podle jednoho respondenta souvisí velmi a podle druhého není souvisejícím pojmem.

Na pětistupňové škále hodnocení, zda je pravidelnost důležitým matematickým pojmem, hodnotili čtyři respondenti na horních dvou stupních (rovnoměrně tedy na každém stupni dva), stupně 3 a 2 využil v obou případech jeden respondent. Za nedůležitý matematický pojem nepovažuje pravidelnost žádný z respondentů.

V otázce „jak žáci vnímají pravidelnost?“ vybralo pět respondentů možnost „Pravidelné objekty je zajímají více“, čtyři „Vše, co jen trochu připomíná geometricky pravidelný útvar, považují za pravidelné“ a dva „Pokud se o ní přesvědčí, zahrnují ji do svých argumentů“. Možnosti „Pravidelné objekty je zajímají více“ a „Jiné“ nezvolil žádný respondent.

Výskyt v učebnicích byl hodnocen neutrálně nebo negativně, v případě negativního hodnocení byl důvodem nedostatečný výskyt pravidelnosti v učebnicích. Konkrétně respondenti uváděli tuto zkušenost s učebnicemi Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií a s učebnicemi Matematika pro SOŠ, pravděpodobně (Odvárko, 2009).

4.3 Analýza učebnic

Sestavení dotazníku pro žáky předcházela také předběžná analýza několika řad učebnic, při které jsme se zaměřili především na výskyt pravidelných mnohoúhelníků, v jakých kontextech jsou používány, jestli je na jejich pravidelnost upozorňováno a jestli jsou definovány. Takto jsme prošli řady učebnic (Binterová a kol., 2007 – 2010), (Odvárko, Kadleček, 1997 – 2001), (Coufalová a kol., 1998 – 2000) a (Rosecká, 1997 – 2000).

Z dotazování učitelů mimo jiné vyplynulo, že podle jejich zkušeností žáky pravidelné útvary zajímají více než nepravidelné. Množství, v jakém jsou zařazovány do učebnic druhého stupně základní školy, tomu však neodpovídá. Z pravidelných mnohoúhelníků se nejvíce vyskytuje čtverec jako jeden ze základních tvarů pro různé typy úloh. Opakovaně se vyskytuje i rovnostranný trojúhelník, mnohoúhelníky s více vrcholy se vyskytují méně. Z platónských těles se v učebnicích pro základní školy vyskytuje pouze krychle. V kapitolách věnovaných tělesům se ale vyskytují pravidelné mnohoúhelníky jakožto základny pravidelných hranolů a jehlanů — nejčastěji opět čtverec a rovnostranný trojúhelník.

Jak již bylo uvedeno, žádný z učitelů neoznačil míru zastoupení matematické pravidelnosti v učebnicích jako adekvátní nebo spíše adekvátní. Podle předběžné analýzy širšího spektra učebnic pro druhý stupeň základní školy a odpovídající ročníky víceletých gymnázií je patrně nedostatečně využita motivační síla pravidelných útvarů. Z učebnic pro základní školu je jednou z těch, ve kterých se geometrická pravidelnost vyskytuje oproti ostatním více, řada učebnic nakladatelství Fortuna (Coufalová a kol., 1998 – 2000), pro jejíž podrobnější analýzu jsme se rozhodli zejména z důvodu, že je používána na škole, kde probíhal výzkum.

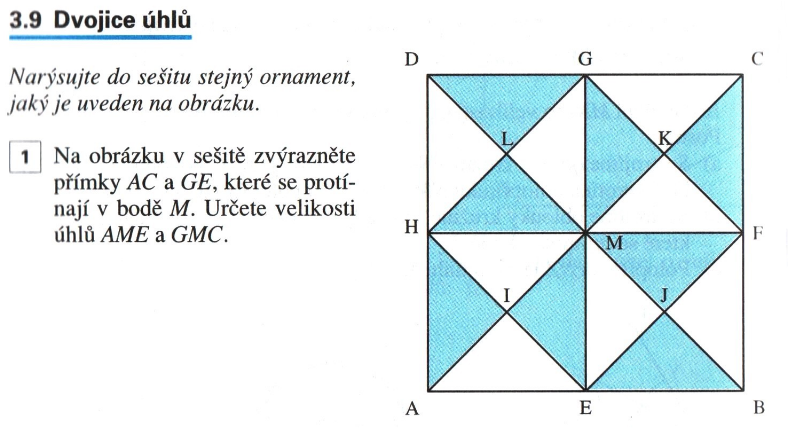
4.3.1 Coufalová a kolektiv, Fortuna

V učebnicích (Coufalová a kol., 1998 – 2000) jsou pravidelné mnohoúhelníky opakovaně použity v kapitolách o souměrnostech a v rámci opakování těchto kapitol. Definovány jsou ale až na konci učebnice pro devátý ročník v kapitole, která se věnuje tělesům. Využití pravidelných útvarů má většinou spíše ilustrační charakter, úlohy s nimi jsou zařazovány spíše v procvičování a opakování, málokdy v motivačních úlohách, čtverec a rovnostranný trojúhelník často vystupují v pozici, kde by mohly být nahrazeny obecnějším mnohoúhelníkem. V některých případech se jedná o žádoucí zjednodušení, ale pokud je například rovnostranný trojúhelník použit jako zástupce trojúhelníků, může být jeho pravidelnost až škodlivá a vést k neoprávněnému očekávání pravidelnosti ze strany žáků.

Učebnice pro šestý ročník (Coufalová a kol., 1998)

V rámci opakování jsou využity čtverec a pravidelný pětiúhelník pro grafické znázornění zlomků, čtvercová síť je využívána pro počítání obsahu a mezi prostorovými útvary je zopakována krychle jako těleso ohraničené šesti čtverci. Když jsou jednotky obsahu děleny v kapitole *Desetinná čísla*, překvapivě již není použito dělení čtverce k naznačení fungování tohoto převodu — poznámka autora: stačila by přitom ukázka milimetrového papíru.

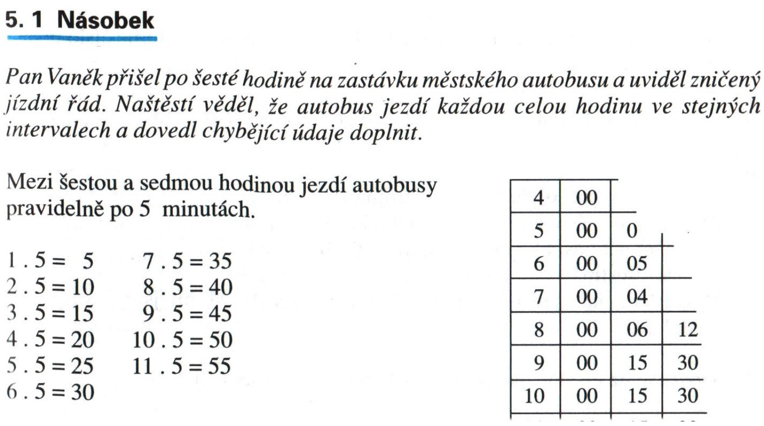
V kapitole *Úhly* jsou zavedeny minuty a pravidelné mnohoúhelníky zůstávají nevyužity — poznámka autora: vzhledem k tomu, že nebyly definovány, je to pochopitelné, ale úloha na úhly v pravidelném sedmiúhelníku by možná lépe podnítila zájem o dělení stupně na drobnější jednotky úhlu. Dále v této kapitole je jedno z „náhodných“ použití čtverce jakožto základního tvaru zadaného ornamentu (obr. 4.1). Úkolem je zjistit velikost každého



Obr. 4.1: Příklad s ornamentem složeným ze čtverců (str. 106)

z dvojice vrcholových úhlů. Poznámka autora: pokud by se celý ornament „sklopil“[1] a byl zadán úhel tohoto sklopení, zůstala by úloha se stejnou myšlenkou, jen s příslušným kosočtvercem místo čtverce; nicméně pro takové sklopení není žádný důvod, protože by úlohu pouze komplikovalo a zadaný ornament se opravdu ve skutečnosti vyskytuje.

Použití čtverců a rovnostranných trojúhelníků je „náhodné“ i na začátku kapitoly *Osová souměrnost*, kde jsou společně s kruhem v roli destiček ze stavebnice a úkolem je pouze skládat na sebe stejné dílky (stejného tvaru i velikosti) — náhodnost jejich použití je v tom smyslu, že zde stejnou roli mohly hrát destičky jakéhokoli jiného tvaru. Osová souměrnost útvarů je podrobně rozebrána na příkladu čtverce, u kterého jsou naznačeny všechny jeho osy. Pro poznávání, zda je přímka osou souměrnosti, jsou použity mimo jiné rovnostranný trojúhelník a pravidelný pětiúhelník, pro spočítání os souměrnosti jsou vybrány čtverec a pravidelný šestiúhelník. Na pravidelnost těchto mnohoúhelníků ale není nijak upozorňováno.



5. 1 Násobek

Pan Vaněk přišel po šesté hodině na zastávku městského autobusu a uviděl zničený jízdní řád. Naštěstí věděl, že autobus jezdí každou celou hodinu ve stejných intervalech a dovedl chybějící údaje doplnit.

Mezi šestou a sedmou hodinou jezdí autobusy pravidelně po 5 minutách.

1 . 5 = 5
2 . 5 = 10
3 . 5 = 15
4 . 5 = 20
5 . 5 = 25
6 . 5 = 30
7 . 5 = 35
8 . 5 = 40
9 . 5 = 45
10 . 5 = 50
11 . 5 = 55

4	00		
5	00	0	
6	00	05	
7	00	04	
8	00	06	12
9	00	15	30
10	00	15	30

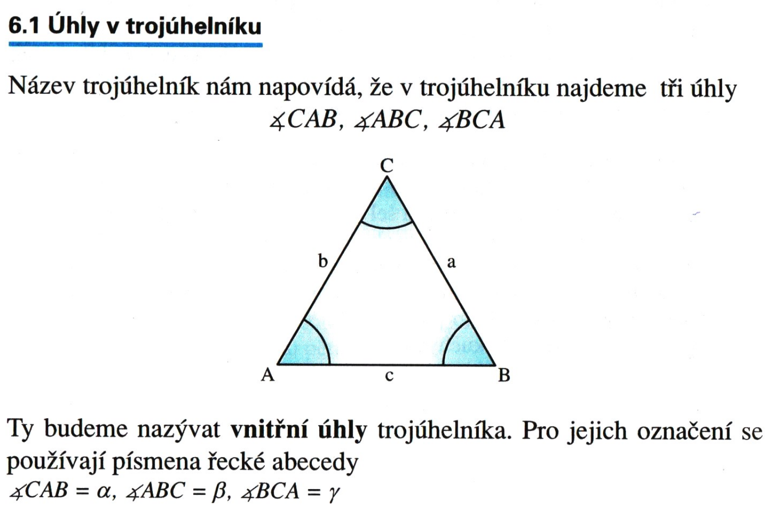
Obr. 4.2: Úloha využívající pravidelnosti v odjezdu autobusů (str. 131)

V běžném smyslu je pravidelnost použita v kapitole *Dělitelnost přirozených čísel*, kde je v motivační úloze uvedeno „Mezi šestou a sedmou hodinou jezdí autobusy pravidelně po pěti minutách“(obr. 4.2). Z pohledu pojetí pravidelnosti je zajímavý zejména kontext

[1]Sklopením je myšlena transformace, která zachovává rovnoběžnost, ale mění úhly. Úhlem sklopení je myšlen úhel doplňkový k ostrému úhlu, na který byl transformován pravý úhel.

úlohy, který odkazuje na společný prvek s pravidelnými mnohoúhelníky: stačí znát jeden prvek (úsečku, čas odjezdu) a pravidlo pro přidávání dalších prvků (úhel, po 5 minutách) a je možné vytvořit celý objekt (mnohoúhelník, jízdní řád mezi šestou a sedmou hodinou).

Rovnostranný trojúhelník je jedním z témat kapitoly *Trojúhelník*. Dokonce je opakovaně použit v obecném příkladu nejprve nepříliš šťastně v ukázce úhlů v trojúhelníku a zavedení jejich standardního označení (obr. 4.3), podruhé lépe v motivačním příkladu ke středním



6.1 Úhly v trojúhelníku

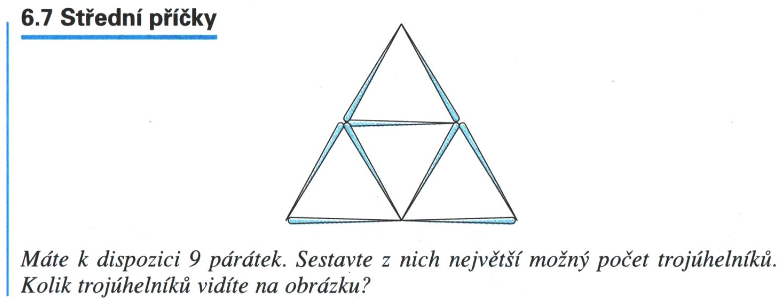
Název trojúhelník nám napovídá, že v trojúhelníku najdeme tři úhly

$\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$

Ty budeme nazývat **vnitřní úhly** trojúhelníka. Pro jejich označení se používají písmena řecké abecedy

$\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$

Obr. 4.3: Zavedení úhlů v trojúhelníku na příkladu rovnostranného trojúhelníku (str. 158)

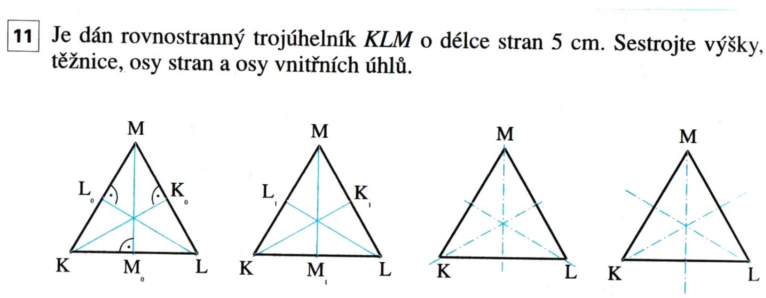


6.7 Střední příčky

Máte k dispozici 9 párátek. Sestavte z nich největší možný počet trojúhelníků. Kolik trojúhelníků vidíte na obrázku?

Obr. 4.4: Motivační příklad k tématu středních příček využívající rovnostranný trojúhelník (str. 174)

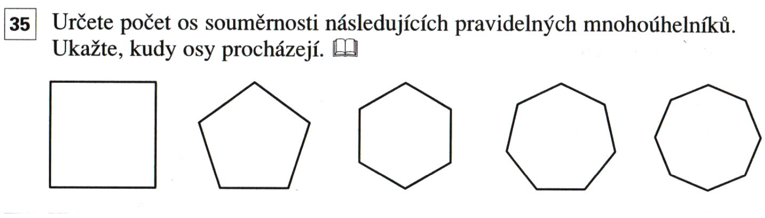
příčkám, kde je úkolem z devíti párátek složit co nejvíce trojúhelníků, které jsou díky stejně dlouhým párátkům nevyhnutelně rovnostranné (obr. 4.4). O pravidelnosti rovnostranného trojúhelníku ale není v kapitole žádná zmínka, v části *Úhly v trojúhelníku* je bez popisu zadán k výpočtu velikosti úhlů trojúhelník se třemi stejnými úhly, v části *Třídění trojúhelníků* je pouze informace, že jeho strany mají stejnou velikost a v úloze 3 (str. 165) je zadáno porovnat pomocí průsvitky vnitřní úhly tří různě velkých rovnostranných trojúhelníků. Velikost úhlů v rovnostranném trojúhelníku je předmětem řešeného příkladu až v části *Souměrné trojúhelníky* poté, co je bez důkazu uvedeno „Rovnostranný trojúhelník má shodné všechny tři vnitřní úhly.“ Další dvě úlohy v této kapitole jsou typu „spočítejte kolik je na obrázku rovnostranných trojúhelníků“ a jedna úloha je věnována splynutí os stran a úhlů s těžnicemi a výškami (obr. 4.5). I v této kapitole figuruje čtverec, pro který se má určit, kolik rovnoramenných trojúhelníků vznikne jeho rozdělením úhlopříčkami.



Obr. 4.5: Úloha zaměřená na splynutí os stran a úhlů s těžnicemi a výškami v rovnostranném trojúhelníku (str. 178)

Kapitola *Tělesa* se zabývá krychlí a kvádrem. Pomocí krychlí je zároveň ze začátku počítán objem — je zavedena krychlová síť. Dále jsou uvedeny vzorce pro výpočet obsahu a povrchu a definovány úhlopříčky. Z pravidelných vlastností krychle je uvedena pouze skutečnost, že má všechny hrany stejně dlouhé, což ale mají i kosočtverečné mnohostěny.

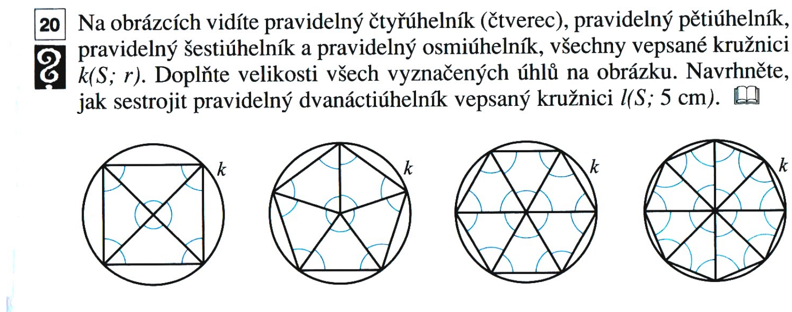
Poprvé je v učebnici o mnohoúhelníku napsáno, že je pravidelný, až v závěrečném opakování, kde v úloze 35 je úkolem spočítat, kolik os mají pravidelné mnohoúhelníky zadané obrázkem. A mezi mnohoúhelníky je i čtverec, takže jeho zařazení mezi pravidelné mnohoúhelníky je zde přítomno v druhém plánu (obr. 4.6).



Obr. 4.6: Označení mnohoúhelníků jako pravidelných v zadání úlohy (str. 199)

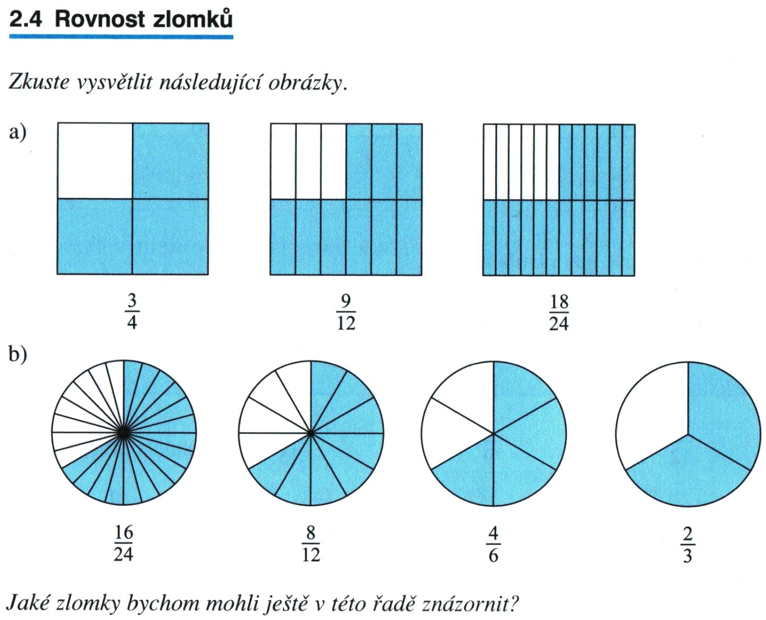
Učebnice pro sedmý ročník (Coufalová a kol., 1999)

V rámci opakování učiva šestého ročníku je zařazena úloha na počítání velikostí úhlů v pravidelných mnohoúhelnících. V zadání je explicitně napsáno „pravidelný čtyřúhelník (čtverec)". Všechny mnohoúhelníky jsou rozděleny na příslušný počet trojúhelníků se společným vrcholem ve středu mnohoúhelníku a jednou stranou společnou s původním mnohoúhelníkem. Tím vzniká potřeba úhlových minut i v osmiúhelníku — a sedmiúhelník pro přibližný výpočet v zadání není (obr. 4.7). Poznámka autora: nedostatkem dělení na trojúhelníky je, že není úkolem vypočítat velikost žádného celého vnitřního úhlu zadaných mnohoúhelníků. Dodatečným úkolem této úlohy je navrhnout konstrukci pravidelného dvanáctiúhelníku. Mezi tělesy je ve shodě s rozsahem učiva v předchozí učebnici uvedena krychle.



Obr. 4.7: Počítání úhlů v pravidelných mnohoúhelnících (str. 27)

Použití čtverce pro znázornění zlomků se vyskytuje v různých učebnicích, druhé kapitola této učebnice není výjimkou. Konkrétně se zde vyskytuje jako jedna z demonstrací rovnosti zlomků (obr. 4.8), nicméně v celé kapitole převažuje dělení kruhu. Podobně se čtverec vyskytuje i v kapitole *Shodnost, konstrukce trojúhelníků*, kde je úkolem dokázat, že jsou



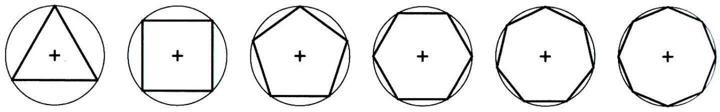
Obr. 4.8: Použití čtverce k naznačení rovnosti zlomků (str. 38)

trojúhelníky vzniklé ze čtverce rozdělením úhlopříčkou shodné — místo čtverce by mohl být použit kterýkoli jiný rovnoběžník. V kapitolách *Celá čísla* a *Racionální čísla* se pravidelnost nijak nevyskytuje. Periodický rozvoj, který se objevil v dotazování učitelů jako příklad pravidelnosti v matematice, není v této učebnici zařazen.

V kapitole *Středová souměrnost, další shodná zobrazení* je hned v úvodní úloze bez popisu schován pravidelný šestiúhelník v plánu městské hromadné dopravy a ve čtvercové síti je středově zobrazován mezi jinými útvary i čtverec. Podobně jako u osové souměrnosti je i středová souměrnost útvaru ukázána na příkladu čtverce. Analogicky ze zařazena úloha na určování, zda je vyznačený bod středem souměrnosti útvaru. V ní jsou mezi ostatními útvary zadány také čtverec a rovnostranný trojúhelníku. Úloha 7 je pak zaměřena přímo na určení, zda jsou pravidelné n-úhelníky středově souměrné; je mezi ně zařazen rovnostranný trojúhelník a všechny další pravidelné n-úhelníky až do $n = 8$ (obr. 4.9), rovnostranný trojúhelník je tak poprvé označen jako pravidelný mnohoúhelník.

Kromě obrázku matice (druhého dílu k šroubu), který se vyskytuje v kapitole *Poměr* a má pochopitelně pravidelný šestiúhelníkový tvar, stojí za zmínku ještě klasifikace v osmé

7 Na obrázku je několik pravidelných mnohoúhelníků (n-úhelníků, n = 3, 4, 5, 6, 7, 8). Ve kterých případech je střed kružnice jim opsané zároveň i středem souměrnosti daného mnohoúhelníku?



Obr. 4.9: Pravidelné n-úhelníky v zadání úlohy na středovou souměrnost (str. 160)

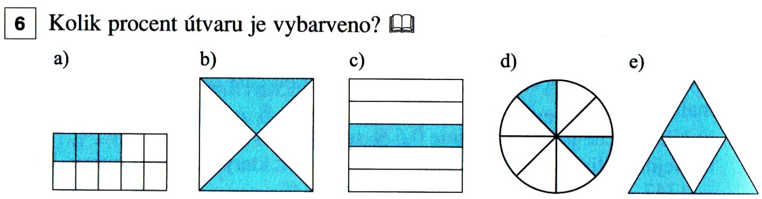
kapitole *Čtyřúhelníky*, kde je čtverec zasazen do systematizace čtyřúhelníků jakožto rovnoběžník s kolmými a shodnými stranami(obr. 4.10).

PAMATUJTE SI...

sousední strany rovnoběžníka	jsou kolmé	nejsou kolmé
jsou shodné	čtverce	kosočtverce
nejsou shodné	obdélníky	kosodélníky
	pravoúhelníky	kosoúhelníky

Obr. 4.10: Tabulka klasifikace rovnoběžníků (str. 209)

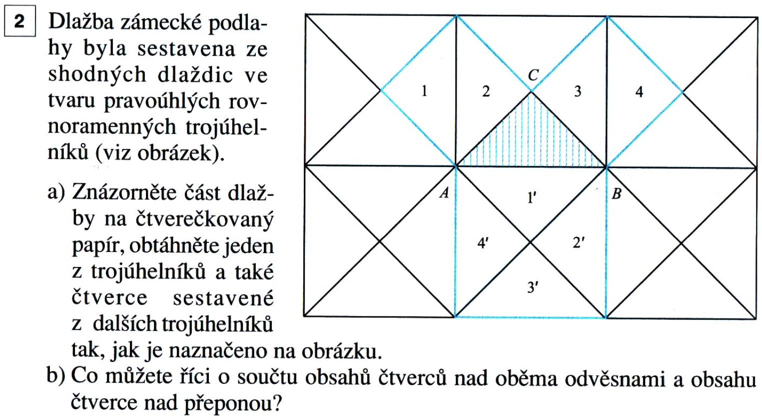
Pro ilustraci procent je použita čtvercová síť „deset na deset“ a jeden její čtverec jako reprezentant jednoho procenta. V úlohách je dále částečné vybarvení čtverce a rovnostranného trojúhelníku (obr. 4.11) — místo nich by mohl být použit libovolný rovnoběžník nebo v případě dělení úhlopříčkami i deltoid a pro dělení středními příčkami obecný trojúhelník. Jejich výběr svědčí o tom, že úlohy s nimi mohou mít i podle autorů učebnice motivační účinek, časté užívání ale může přispívat k nebezpečnému přesvědčení žáků, že každý trojúhelník považují za rovnostranný, pokud není výslovně uvedeno jinak. V kapitole *Hranoly* je použit pětiúhelník, který by mohl být pravidelný, ale není to uvedeno, a ani u hranolu, jehož podstavou je rovnostranný trojúhelník, není upozorněno na možné označení „pravidelný trojboký hranol“.



Obr. 4.11: Čtverec a rovnostranný trojúhelník v úloze zaměřené na počítání procent (str. 236)

Učebnice pro osmý ročník (Coufalová a kol., 2000)

V opakování učiva ze sedmého ročníku se vyskytuje z pravidelných útvarů pouze čtverec v několika kontextech — opakuje se úloha na zdůvodnění shodnosti trojúhelníků vzniklých rozdělením čtverce úhlopříčkou, jako objekt určený ke zobrazení v osové souměrnosti a také v přehledu typů čtyřúhelníků. Jednou z úloh k opakování vlastností čtyřúhelníků je i výpočet obsahu čtvercové plochy s čtvercovým otvorem.

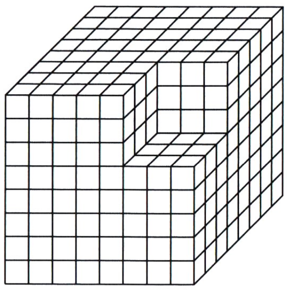


Obr. 4.12: Úloha se zámeckou dlažbou z pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků poskládaných do čtverců (str. 52)

Čtverec je nutnou ilustrací i v následujících kapitolách *Druhá mocnina* a *Pythagorova věta*, které by se bez něj neobešly. Specificky jsou čtverce použity v jednom z motivačních příkladů k Pythagorově větě. Je v něm ukázán její speciální případ pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník v „zámecké dlažbě“ (ornamentu, který se vyskytoval již v učebnici pro šestý ročník), kdy čtverce nad odvěsnami jsou složeny ze dvou a čtverec nad přeponou je složen ze čtyř shodných trojúhelníků (obr. 4.12).

V kapitole *Mocniny* je využita krychle v úloze na počítání krychliček z nichž se skládá rozdíl dvou krychlí — těleso zadané obrázkem (obr. 4.13). Pro potřeby definice třetí odmoc-

6 Z kolika krychliček se skládá těleso na obrázku?

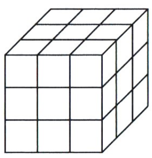


Obr. 4.13: Krychličky v úloze na třetí mocninu (str. 62)

niny je pak opačným postupem počítána hrana krychle složené z daného počtu krychliček (obr. 4.14).

4.3 Třetí odmocnina

Jaruška postavila hrad z 27 stejných kostek. Kolik kostek by stálo podél hrany krychle, která by byla postavena ze stejného množství kostek?



$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$

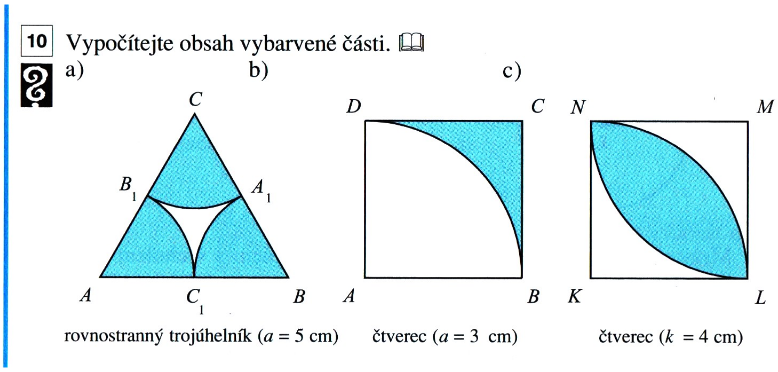
$27 = 3^3$

$\sqrt[3]{27} = 3$

Třetí odmocnina z 27 jsou tři.

Obr. 4.14: Krychličky v motivační úloze třetí odmocniny (str. 63)

Podobně jako v kapitole o procentech jsou využity rovnostranný trojúhelník a čtverec v kapitole *Kruh, kružnice*, kde je zadáno několik úloh, ve kterých jsou počítány obsahy a obvody různých kombinací kruhu s těmito útvary (obr. 4.15). Opět může být využití pravidelných mnohoúhelníků pro žáky více motivující, mohly být využity i další nejen pravidelné mnohoúhelníky — například kosočtverec. Nicméně v této kapitole je pro úlohy důležitá shodnost stran použitých mnohoúhelníků.



Obr. 4.15: Kombinace rovnostranného trojúhelníku a čtverce s kruhem pro výpočet obsahu (str. 94)

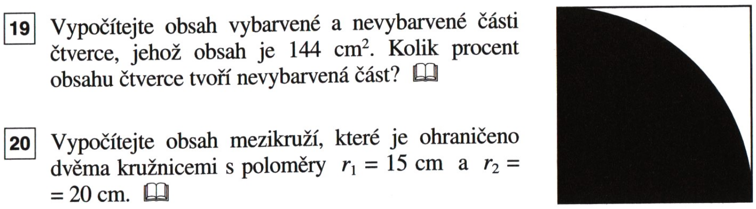
Čtverec je využit v kapitole *Výrazy* pro grafické znázornění vzorců s druhými mocninami. Použití je ale stejně jako v první části učebnice skutečně jen ilustrativní. To je samozřejmě důležité zvlášť pro geometricky zaměřené žáky, ale pojem pravidelnosti není nijak rozvíjen ani používán.

Až do závěrečného opakování pak v této učebnici na pravidelnost v žádném smyslu nenarazíme. V opakování jsou vybrány další úlohy s kombinací čtverce a kruhu pro výpočet obsahu a obvodu.

Učebnice pro devátý ročník (Coufalová a kol., 2000)

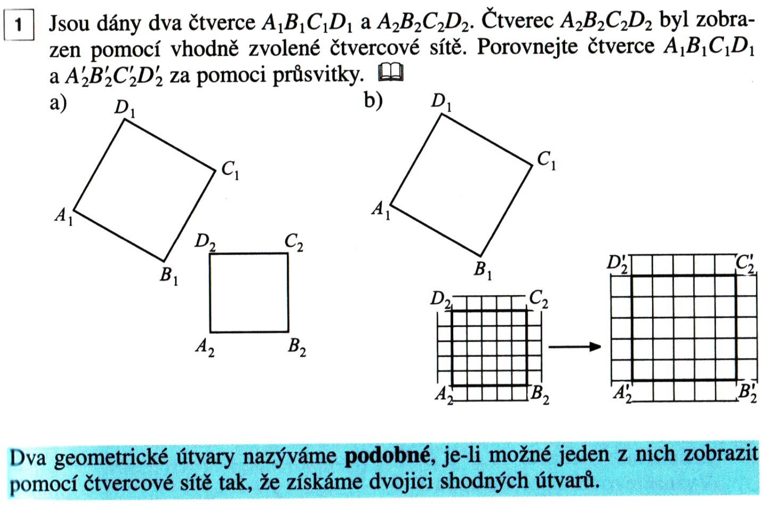
Z hlediska pravidelnosti není v devátém ročníku mnoho co opakovat. V opakování jsou proto kromě nákresu Pythagorovy věty pouze dvě úlohy, kdy jednou je úkolem vypočítat obsah čtvercové plochy s kruhovým otvorem a podruhé zjistit obsah částí čtverce rozděleného čtvrtkružnicí s poloměrem stejné délky jako je strana zadaného čtverce (obr. 4.16). V kapitolách *Lomený výraz* a *Řešení lineárních rovnic* jsme nezaznamenali žádný výskyt pravidelnosti.

Na čtverce a rovnostranné trojúhelníky bohatá je kapitola *Podobnost geometrických útvarů, stejnolehlost*, ostatní pravidelné mnohoúhelníky ale zastoupeny nejsou. Čtverec se



Obr. 4.16: Úloha na výpočet částí čtverce rozděleného čtvrtkružnicí (str. 34)

vyskytuje v několika vysvětlujících příkladech, nejprve jako ukázka dvou podobných útvarů (obr. 4.17), dále jako protipříklad podobnosti postupně s kosočtvercem a obdélníkem. S ko-



Obr. 4.17: Ukázka podobnosti na příkladu dvou čtverců (str. 75)

sočtvercem je demonstrována nutnost stejného poměru pro všechny úsečky — úhlopříčky nejsou ve stejném poměru a proto nejsou kosočtverec a čtverec podobné. S obdélníkem je demonstrována nutnost shodnosti všech úhlů - nejen mezi stranami, ale i mezi stranou a úhlopříčkou. Rovnostranný trojúhelník je ve dvou úlohách využit jako jeden z mnoha objektů. Zajímavá je úloha na konstrukci stejnolehlého trojúhelníku s koeficientem stejnolehlosti -2 při středu stejnolehlosti v těžišti (obr. 4.18). V úloze je zadaný trojúhelník rovnostranný, ale mohl by být nahrazen obecným trojúhelníkem. Zjednodušení je pochopitelně jak v zadání, tak v řešení. Zobecnění, že vždy vznikne trojúhelník, jehož střední

7 Narýsujte rovnostranný trojúhelník *ABC* o straně 5 cm.

a) Najděte těžiště *T* trojúhelníka *ABC*.

b) Sestrojte obraz $\triangle ABC$ ve stejnolehlosti $\mathscr{H}(T, -2)$.

Obr. 4.18: Konstrukční úloha s rovnostranným trojúhelníkem (str. 90)

příčky bude tvořit zadaný trojúhelník, je ale ponecháno na učiteli.

V následujících dvou kapitolách *Soustavy lineárních rovnic* a *Funkce* se pravidelnost nevyskytuje. Například v učitelském dotazníku zmiňovaná funkce sinus je předmětem až další kapitoly a navíc bez periodicity.

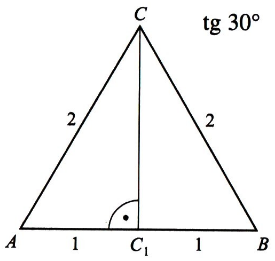
a) Uvažujme rovnostranný trojúhelník *ABC* s délkou strany $a = 2$ cm.

$$\sin 30° = \frac{|AC_1|}{|AC|} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{|AC_1|}{|CC_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Pomocí Pythagorovy věty:

$$|AC_1|^2 + |C_1C|^2 = |AC|^2$$
$$1^2 + |C_1C|^2 = 2^2$$
$$|C_1C|^2 = 3$$
$$|C_1C| = \sqrt{3}$$



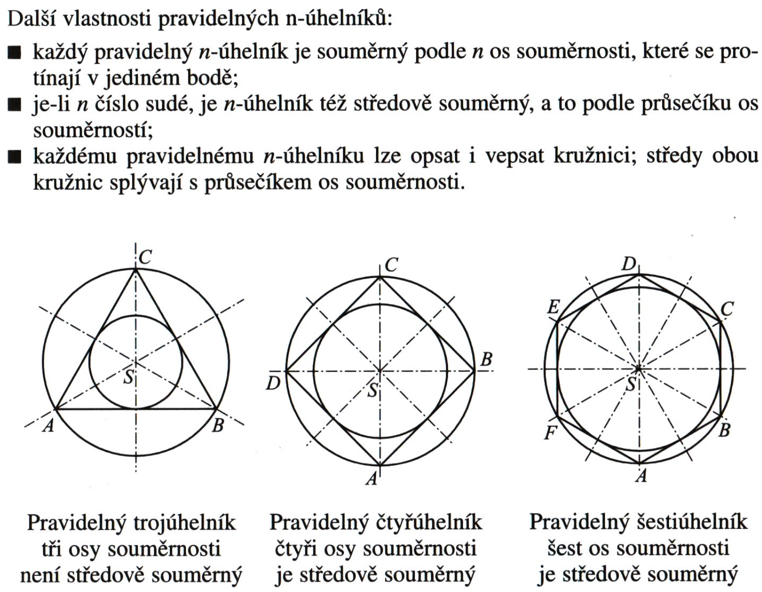
$$\sin 60° = \frac{|CC_1|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{|CC_1|}{|AC_1|} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Obr. 4.19: Využití rovnostranného trojúhelníku pro výpočet goniometrických funkcí (str. 152)

V kapitole *Goniometrické funkce ostrého úhlu* je mimo jiné zadán rovnostranný trojúhelník, u kterého je úkolem spočítat délku výšky pomocí Pythagorovy věty a pomocí goniometrických funkcí. Je tak poprvé komplexněji zkoumán rovnostranný trojúhelník. V části věnované grafům goniometrických funkcí je rovnostranný trojúhelník se stranou délky 2, tedy s výškou $\sqrt{3}$, využit pro rychlé vyjádření hodnot funkcí sinus a tangens pro úhly $30°$ a $60°$ (obr. 4.19).

Pravidelnost v jejím běžném slova smyslu se skrytě vyskytuje v kapitole *Základy finanční matematiky.* Ovšem pravidelné výdaje a příjmy jsou zde popisovány jako „každý den“, „ročně“, „stálá měsíční platba“ a podobně. V oblasti financí je dostatek synonym, které lze použít, ale těžko soudit, zda se autoři učebnice vyhýbali slovu „pravidelně“ záměrně — narozdíl od úlohy s odjezdy autobusu z učebnice pro šestou třídu, kde bylo přímo použito slovo „pravidelně“.



Další vlastnosti pravidelných n-úhelníků:

- **každý pravidelný *n*-úhelník je souměrný podle *n* os souměrnosti, které se protínají v jediném bodě;**
- **je-li *n* číslo sudé, je *n*-úhelník též středově souměrný, a to podle průsečíku os souměrností;**
- **každému pravidelnému *n*-úhelníku lze opsat i vepsat kružnici; středy obou kružnic splývají s průsečíkem os souměrnosti.**

Pravidelný trojúhelník
tři osy souměrnosti
není středově souměrný

Pravidelný čtyřúhelník
čtyři osy souměrnosti
je středově souměrný

Pravidelný šestiúhelník
šest os souměrnosti
je středově souměrný

Obr. 4.20: Vlastnosti pravidelných n-úhelníků (str. 175)

Téměř na samém konci řady učebnic jsou na začátku kapitoly *Povrchy a objemy těles* konečně pravidelné mnohoúhelníky definovány: „Pravidelný mnohoúhelník je mnohoúhelník, který má všechny strany navzájem shodné a všechny vnitřní úhly rovněž navzájem shodné.“ Jsou zde rovněž konstatovány některé vlastnosti pravidelných n-úhelníků: mají n os souměrnosti, pro sudá n jsou středově souměrné, lze jim vepsat i opsat kružnici, tyto dvě kružnice jsou soustředné (obr. 4.20) a společný střed je současně průsečíkem os souměrnosti. Vyobrazeny jsou pouze pro $n \in \{3, 4, 6\}$ a pro pravidelný šestiúhelník je odvozen vzorec pro obsah (pomocí rozkladu na šest rovnostranných trojúhelníků). Dále již jsou pravidelné mnohoúhelníky využity jako podstavy pravidelných hranolů a jehlanů.

V navazující kapitole *Pravoúhlé promítání* jsou n-boké pravidelné hranoly součástí několika úloh na poznávání („Jaké těleso je zobrazeno na obrázku?“ i konstrukce. Vždy však pro $n \in \{3, 4, 6\}$. V rámci závěrečného opakování je úkolem vypočítat úhly v krychli a pravidelném čtyřbokém jehlanu.

4.4 Dotazník

Pro šetření jsme zvolili formu dotazníku pro žáky, ve kterém bylo třináct úloh s jednotným zadáním „Vyber z každé skupiny 1 nebo 2 objekty, které do ní nepatří, a napiš důvod tohoto výběru. Pokud najdeš více objektů nebo dvojic, které by mohly do skupiny nepatřit, napiš odděleně všechny možnosti.“ V každé skupině bylo na výběr z pěti objektů. Objektem se rozumí skupina čísel, rovinný útvar nebo obraz tělesa ve volném rovnoběžném promítání. Celý dotazník je v příloze 2.

Objekty byly jednak pravidelné — pravidelné n-úhelníky pro $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, z těles pravidelný čtyřstěn, krychle a pravidelný osmistěn, číselné posloupnosti. Další skupinou byly objekty symetrické — mnohoúhelníky s jednou osou symetrie nebo středově souměrné, skupiny čísel se stejným pořadím čísel při čtení zleva i zprava. Poslední skupinou byly objekty ostatní — pravoúhlý trojúhelník, obecný čtyřúhelník, pětiúhelník se dvěma pravými úhly a stejně dlouhými stranami, obecný pětiúhelník, obecný osmistěn s trojúhelníkovými stěnami, šestistěnné těleso s několika pravými úhly, skupiny čísel bez jakéhokoli systému.

V úvodu byli žáci požádáni o několik informací — kromě identifikace formou jména nebo přezdívky a třídy šlo o studijní výsledky z matematiky a oblíbenost tohoto školního předmětu.

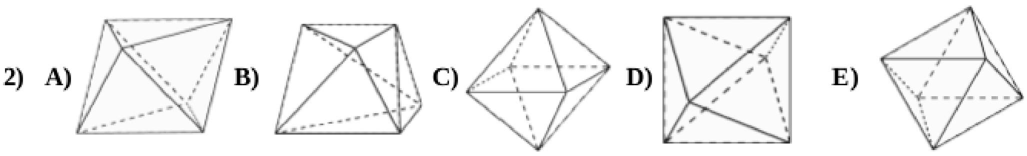
Vzhledem k očekávaným znalostem žáků devátého ročníku byly nejvíce zastoupeny rovinné útvary, méně byla zastoupena tělesa. Skupiny čísel se vztahovaly pouze k jedné hypotéze, proto byly i do dotazníku použity v menší míře.

První otázka (obr. 4.21) byla referenční pro otázky zahrnující posloupnosti. Objekty jsou pouze skupiny čísel, z nichž u jedné není žádná souvislost mezi čísly, jedna je symetrická, zbývající tři skupiny mají mezi čísly pravidlo (násobení 2, přičítání 3 a 4).

1) A) 1, 2, 4, 8, 16 **B)** 2, 3, 5, 3, 2 **C)** 3, 7, 11, 15, 19 **D)** 6, 11, 7, 9, 15 **E)** 3, 6, 9, 12, 15

Obr. 4.21: Otázka zaměřená na vnímání posloupností

Druhá otázka (obr. 4.22) byla zaměřena na schopnost čtení volného rovnoběžného promítání, obsahuje čtyřikrát pravidelný osmistěn z různých pohledů a jeden obecný osmistěn.



Obr. 4.22: Otázka zaměřená na čtení volného rovnoběžného promítání

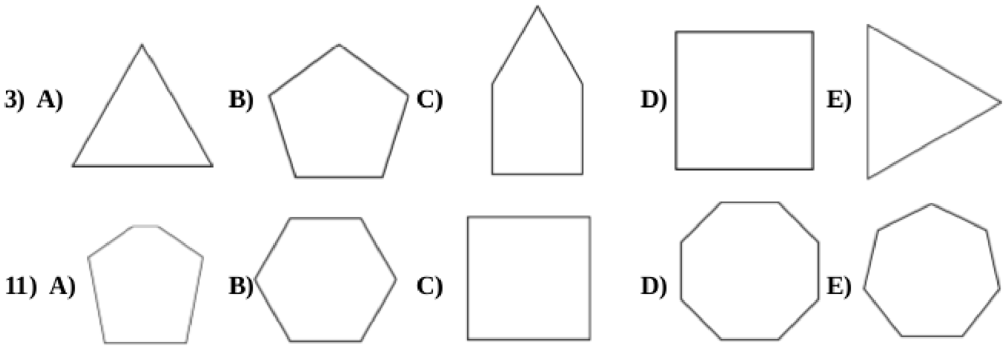
U zbývajících otázek již byla pravidelnost očekávaným kritériem výběru, nicméně otázky byly konstruovány tak, aby bylo připraveno vždy alespoň jedno další kritérium.

Třetí a jedenáctá (obr. 4.23) otázka byly kombinací pravidelných mnohoúhelníků a nepravidelných osově souměrných mnohoúhelníků. V případě třetí otázky byl nepravidelný pětiúhelník se stejně dlouhými stranami a dvěma pravými úhly, v jedenácté otázce šestiúhelník se dvěma rovnoběžnými stranami. V těchto otázkách byla druhým očekávaným kritériem středová souměrnost, v jedenácté byla dalším kritériem parita počtu vrcholů.

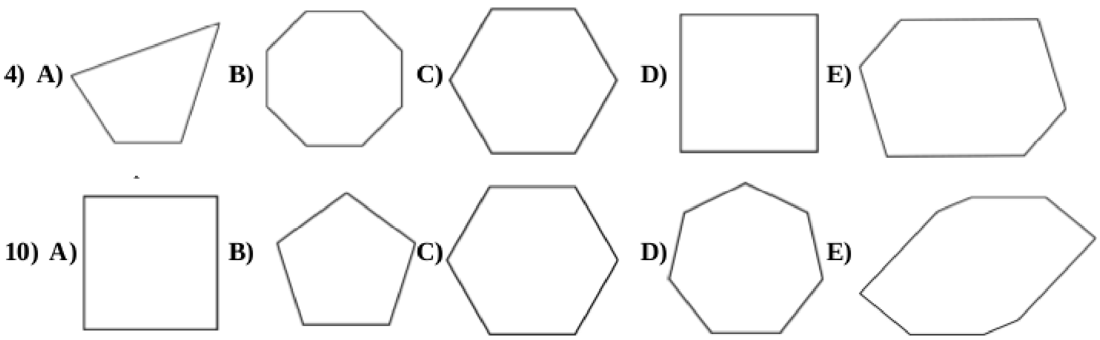
Čtvrtá a desátá (obr. 4.24) otázka obsahují kromě pravidelných mnohoúhelníků také nepravidelné středově souměrné mnohoúhelníky. V těchto otázkách byla druhým očekávaným kritériem osová souměrnost. Ve čtvrté otázce je také obecný čtyřúhelník a dalším předpokládaným kritériem byla středová souměrnost.

Pátá, osmá a dvanáctá otázka (obr. 4.25) kombinovaly rovinné a prostorové geometrické útvary. Očekávaným kritériem proto byla dimenze daného útvaru, u osmé otázky byla dalším kritériem středová souměrnost, u dvanácté osová souměrnost.

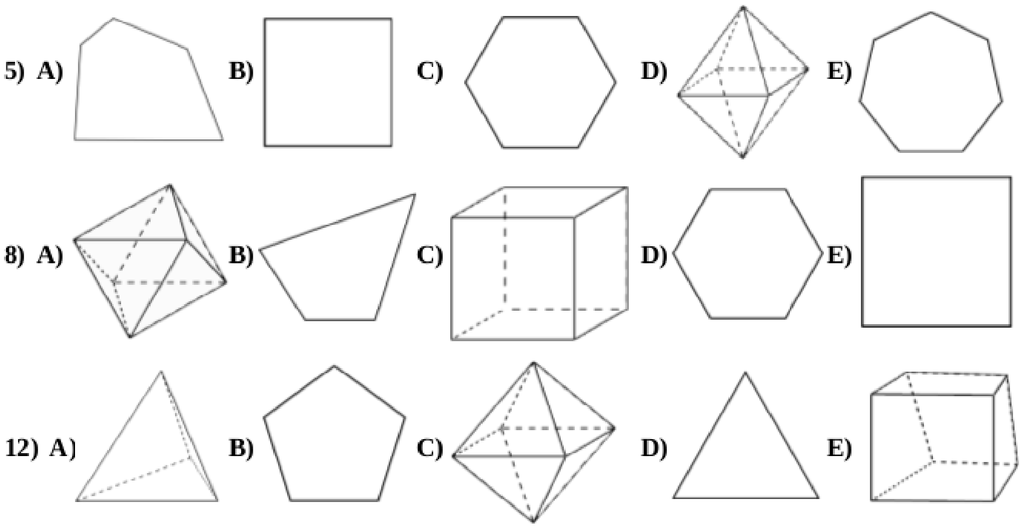
Šestá a devátá otázka (obr. 4.26) byly kombinací rovinných útvarů a skupin čísel.



Obr. 4.23: Otázky kombinující pravidelné a nepravidelné osově souměrné mnohoúhelníky

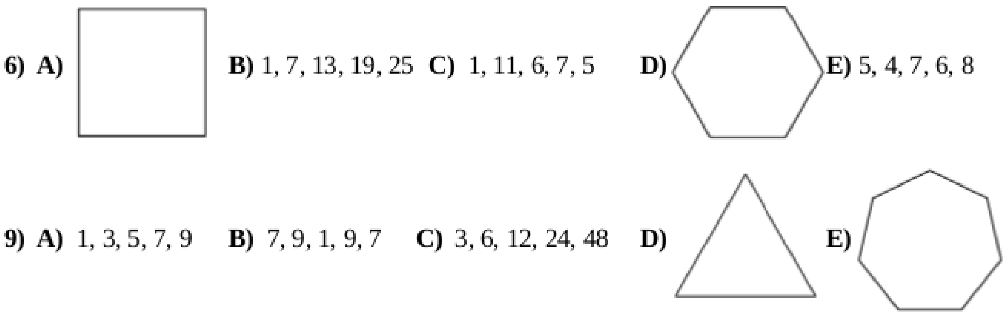


Obr. 4.24: Otázky kombinující pravidelné a nepravidelné středově souměrné mnohoúhelníky



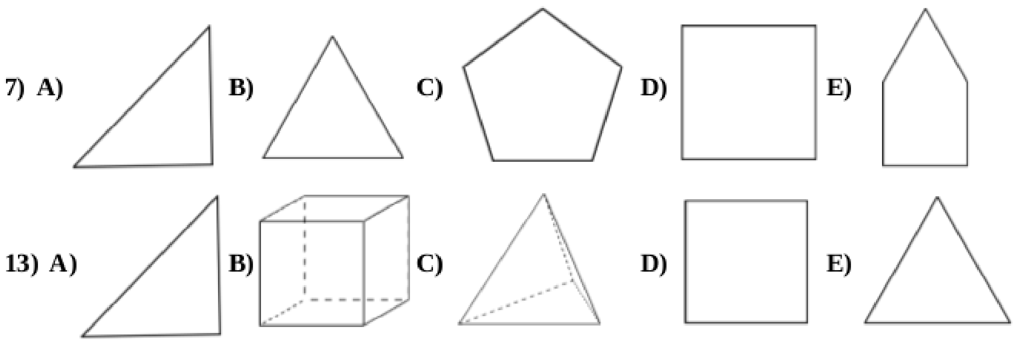
Obr. 4.25: Otázky kombinující mnohoúhelníky a tělesa

U těchto otázek bylo očekávání použití kritéria pravidelnosti nejmenší, předpokládali jsme rozlišování na čísla a geometrické útvary, dalším zamýšleným kritériem byla v deváté otázce osová souměrnost. Z hlediska možnosti využití kritéria pravidelnosti považujeme tyto otázky za nejproblémovější, neboť jsou kombinovány velice rozdílné objekty.



Obr. 4.26: Otázky kombinující pravidelné mnohoúhelníky a skupiny čísel

V sedmé a třinácté otázce (obr. 4.27) figurovaly zejména objekty s pravým úhlem doplněné v sedmé otázce rovnostranným trojúhelníkem a pravidelným pětiúhelníkem, ve třinácté otázce rovnostranným trojúhelníkem a pravidelným čtyřstěnem. Očekávaným kritériem výběru zde tedy kromě pravidelnosti byla pravoúhlost, v sedmé otázce doplněná kritériem počtu vrcholů a ve třinácté kritériem prostorovosti objektů.



Obr. 4.27: Otázky kombinující pravidelné a pravoúhlé útvary

4.4.1 Zadání dotazníku

Dotazník byl zadán na základní škole v Praze 6 na jednom z menších sídlišť ve dvou devátých třídách — 9. A a 9. C. Třída 9. C byla třída s rozšířenou výukou matematiky a přírodovědných předmětů, takzvaná „matematická". V 9. A se zúčastnilo 12 žáků a v 9. C se zúčastnilo 25 žáků. V matematické třídě se výzkumu účastnili také dva úspěšní řešitelé matematické olympiády v kategorii Z9.

V obou třídách jsme kromě zadání v textu dotazníku ukázali, jak by měla práce žáků vypadat na příkladu, ve kterém byly objekty jednotlivá čísla. Konkrétně $2, 3, 5, 6, 9$ a bylo ukázáno několik možných kritérií — 2, 6 jsou sudá čísla; 5 nelze získat jako výsledek násobení nebo dělení ostatních čísel (připouštíme opakování); 6 nelze použít při skládání dvouciferných prvočísel (ostatní například ve 23 a 59); 6, 9 nejsou prvočísla.

4.4.2 Analýza dat

Pro účely kvantitativní analýzy žákovských odpovědí jsme vytvořili tyto kategorie:

- Pravidelnost — pojmenovaná přímo (tyto objekty jsou/nejsou pravidelné) nebo nepřímo jako systém (nepřímý popis byl používán pouze u posloupností);
- Shodnost v rámci objektu — shodné úhly nebo shodné strany;
- Osová souměrnost;
- Možnost vepsat nebo opsat kružnici;
- Středová souměrnost;
- Rovnoběžnost stran;
- Extrémní počet — nejvyšší nebo nejnižší počet stran, vrcholů;
- Jedinečný počet — jediný počet, který se mezi objekty neopakuje;
- Kritérium parity;

- Přítomnost pravého úhlu;
- Typ objektu — rozlišení na čísla a geometrii, případně rovinné a prostorové objekty;
- Opakující se objekt;
- Společná součást — touto součástí může být číslo nebo geometrický útvar;
- Ostatní — kritéria nespadající do žádného z předchozích, které mají alespoň skrytě matematickou nebo geometrickou podstatu;
- „Prostě proto“ — popis nebo název jednoho z objektů bez pokusu o nalezení vztahu s ostatními objekty;
- Ostatní nematematická hlediska výběru — obrázek něco připomíná, různá tloušťka čar, nebo pouze názor „Nevím, prostě si to myslím“.

Žáci dohromady vytvořili 975 odpovědí, z toho 70 chybných, 93 nematematických a zbývajících 812 matematicky správných. V odpovědích, které jsme označili jako chybné, bylo vždy jasně určené kritérium, které bylo k výběru použito, ale jeho aplikace byla chybná — například byl osově nesouměrný útvar označen jako souměrný. Nematematické odpovědi jsou z největší části typu „prostě proto“ (konkrétně 58) — to jsou případy, kdy byl vybrán trojúhelník s odůvodněním „trojúhelník“, a podobně; zbývajících 35 odpovědí bylo založeno na podbarvení útvaru, rozdílné tloušťce čáry nebo estetickém dojmu žáka. Matematicky správné odpovědi byly takové, kde bylo popsáno kritérium výběru a správně aplikováno.

Medián počtu odpovědí na jednoho žáka je 26, průměr je přibližně $26,32$ odpovědi. Přestože nejméně odpovědí (konkrétně 9) jsme zaznamenali u žáka z matematické třídy, průměrně odpovídala matematická třída téměř dvakrát více — průměr 9. A je $17,83$ odpovědi od jednoho žáka (medián je 14), průměrný počet odpovědí žáků z 9. C je $30,4$ (medián je 29). Tento rozdíl dle našeho názoru vycházejícího jednak z vlastní zkušenosti a jednak z konzultace s učiteli v těchto třídách nevzniká pouze lepšími matematickými schopnostmi žáků 9. C, ale jeho důležitým zdrojem může být všeobecně vyšší studijní nasazení u žáků v matematické třídě.

Počet odpovědí od jednotlivých žáků koreluje jen velmi slabě nejen s jejich studijními výsledky v matematice (korelační koeficient $0,27$), ale také s tím, jak je u žáků matematika oblíbená (korelační koeficient $0,45$). Korelace je lepší pro celý soubor dat z obou tříd, což je ale způsobeno spíše tím, že žáci v matematické třídě všeobecně odpovídali více a zároveň mají lepší prospěch a matematika je pro ně oblíbenější. V jednotlivých třídách je korelace počtu odpovědí s oblíbeností menší než $0,35$, s průměrnou známkou dokonce menší než $0,21$. O počtu odpovědí u jednotlivých žáků tedy více rozhodovaly jiné faktory než oblíbenost matematiky a školní úspěchy v tomto předmětu.

V počtu odpovědí se lišily i jednotlivé otázky. Nejvíce odpovědí vytvořili žáci u otázky číslo 3, konkrétně 93 — z toho 79 matematicky správných. Stejný počet matematicky správných odpovědí byl i u otázky číslo 5, která měla celkem 86 odpovědí. Nejméně (59) odpovědí vzniklo u otázky číslo 6, která kombinovala rovinné útvary se skupinami čísel, druhá otázka stejného typu inspirovala žáky k 69 odpovědím, matematicky správných bylo ale u obou otázek téměř stejně — 47 u šesté a 49 u deváté.

V celkovém součtu byla mezi odpověďmi nejvíce zastoupena kategorie typ objektu, která se mezi odpověďmi vyskytovala téměř vždy u všech otázek, ve kterých byly objekty různých typů — konkrétně otázky 5, 6, 8, 9, 12 a 13. Konkrétně jsme u těchto otázek napočítali 198 odpovědí v této kategorii z hypoteticky možných 222. Podstatnou část tohoto rozdílu tvoří žáci, kteří se u některých otázek rozhodli neodpovídat, několik dalších mohlo vzniknout nedbalým zpracováním posledních otázek. Vztaženo pouze na otázky, ve kterých alespoň jeden žák provedl výběr tímto způsobem, vychází průměr 33 odpovědí založených na typu objektu na otázku — jinými slovy na tyto otázky odpovědělo tímto způsobem průměrně 33 z 37 žáků.

Pravidelnost byla zastoupena v odpovědích u všech otázek, a také z toho důvodu byla v celkovém součtu druhým nejpoužívanějším kritériem s celkovými 117 výskyty. Ovšem i v průměru na otázku je druhou nejvíce zastoupenou odpovědí, ale s mnohem větším odstupem na kategorii typ objektu: pravidelnost u otázek, ve kterých byla použita jako kritérium výběru, uvedlo průměrně 9 žáků.

Ve velké míře žáci odpovídali s využitím nějakého počtu v zadaných útvarech - pro lepší rozlišení byly tyto odpovědi v kategoriích extrémního počtu, jedinečného počtu a v kritériu parity. Počítány byly nejčastěji vrcholy a strany, ale vyskytlo se i počítání os souměrnosti. Nejvíce bylo žáky využíváno kritérium parity — konkrétně v 72 případech s průměrem $7,2$ odpovědi u otázek, u kterých bylo využito. Všechna tato početní kritéria mají v součtu větší zastoupení než pravidelnost s celkovým počtem 147 odpovědí a průměrem $11,31$ na relevantní otázku.

V prvním kvartilu nejvyššího průměru počtu odpovědí na otázky, ve kterých byla daná kategorie využita, jsou již jen dvě další kategorie: osová souměrnost a opakující se objekt. Osová souměrnost byla jedním z předpokládaných kritérií výběru, proto bylo výsledných 57 odpovědí překvapivě málo. Na druhou stranu se toto kritérium vyskytlo mezi odpověďmi na větší počet otázek — konkrétně u deseti otázek. Toto kritérium tedy nepoužilo mnoho žáků, ale ti, kteří ho použili, tak učinili u většího počtu otázek. Kritérium opakování objektu bylo překvapivě využíváno i pro objekty neshodné — například pro rovnostranný a pravoúhlý trojúhelník. I toto použití se podílelo na celkových 38 odpovědích v sedmi otázkách, což tvoří průměr $5,43$ odpovědi na otázku.

Překvapivě málo používaným kritériem byla středová souměrnost objektů, kterou jsme ve třech otázkách očekávali. Přestože byla alespoň jednou kritériem výběru v devíti otázkách, obsahovalo ji pouze dvacet odpovědí. Z toho osmkrát byla navíc použita jako kritérium chybně. Žáci zřejmě nemají středovou souměrnost osvojenou zdaleka tak dobře, jak jsme předpokládali. Podrobnější důvody této skutečnosti ale jsou mimo zaměření této práce.

Kritérium pravoúhlosti používali někteří žáci sice u více otázek, ale v otázkách, které na něj byly zaměřeny, předčilo v počtu využití kritérium pravidelnosti. Konkrétně v otázce číslo 7 bylo kritérium pravidelnosti použito celkem třináctkrát, zatímco kritérium pravidelnosti pouze šestkrát. V otázce 13, kde byla ve výběru i krychle, volili žáci nejčastěji jako kritérium typ objektu (30 výskytů), pravoúhlost devětkrát (z toho dvakrát chybně) a pravidelnost pouze dvakrát. Lze tedy usuzovat, že přítomnost pravého úhlu je pro žáky silnější souvislostí mezi objekty než pravidelnost objektů.

Používání kritéria pravidelnosti

Celkově lze říci, že u žáků, kteří se zúčastnili výzkumu, je pravidelnost oblíbeným kritériem, ovšem pouze v rámci geometrie — dokonce žáci nerozlišovali mezi pravidelností mnohoúhelníků a mnohostěnů. Nejčastěji byla s celkem 20 výskyty pravidelnost použita jako kritérium výběru v otázce číslo 4, ve které jsou pouze rovinné útvary, ale otázkou s druhým nejčastějším výskytem tohoto kritéria se stala s 18 použitími otázka číslo 8, ve které jsou tři mnohoúhelníky (dva z nich pravidelné) a dvě pravidelná tělesa.

Souvislost pravidelnosti v posloupnostech a v geometrii žáci příliš nevnímají. V otázkách 6 a 9, ve kterých byly zařazeny geometrické útvary společně se skupinami čísel, využilo kritérium pravidelnosti pouze pět žáků. Mezi těmito pěti žáky byli oba úspěšní řešitelé matematické olympiády, z nichž jeden jako jediný použil kritérium pravidelnosti u obou zmiňovaných otázek.

Další specifickou vlastností kritéria pravidelnosti oproti kriteriím souměrností je relativně nízký počet chyb. Zatímco ze 77 odpovědí používajících některou souměrnost bylo 16 chybných, tedy asi 21 %, když žáci vybírali podle pravidelnosti objektů, chybovali jen v 6 případech ze 117, tedy jen asi v 5 % případů.

Používání tohoto kritéria ale nejspíš nesouvisí ani s prospěchem žáků ani s jejich oblíbeností matematiky. Pro obě třídy dohromady vychází korelační koeficient kolem $-0,5$ s průměrnou známkou i s oblíbeností. Pouze v běžné třídě se zdá být korelace mezi oblíbeností a pravidelností relativně dobrá (koeficient asi $0,7$), ale to je způsobeno spíše tím, že jediný žák, který ohodnotil svoji oblíbenost matematiky známkou 1, použil současně nejvícekrát (konkrétně osmkrát) kritérium pravidelnosti v rámci své třídy.

4.4.3 Žákovské přístupy k výběru

Při vyplňování dotazníku žáci používali různé metody. Některé z nich se vyskytovaly u více žáků a některé byly individuálně specifické. Společným rysem, kterému šlo jen těžko zabránit, bylo opakované používání stejného kritéria u všech otázek, u kterých to bylo jen trochu možné.

V první otázce nikdo nepoužil přímo slova „je pravidelné“, tři žáci z 9. C se vyjádřili pomocí slov se stejným kořenem: jeden „není tam žádné pravidlo“, druhý „nelze sčítat, odčítat, nás., dělit pravidelně“, třetí „je chaoticky a bez pravidla poskládané“. Ostatní žáci se ve vyjádření absence tohoto pravidla velice různili. V matematické třídě se dále objevilo: „naprosto náhodné“ a u stejného žáka „neprovádí se žádná mat. operace“, další žák použil spojení „není mezi číslicemi žádný logický řetězec“, jiný popsal svoje kritérium slovy „nemá to stejný ‚princip‘“, podobně „v ostatních odčítám nebo přičítám, pokračuji v řadě“, další žák popsal dvě kritéria slovy „není logicky seřazené“ a „nemá mat. řád“, poslední „žádný logický postup při psaní čísel“. V 9. A se vyskytly následující tři popisy odkazující nějakým způsobem na pravidlo v některých posloupnostech: „nemají mezi sebou výraznou či žádnou spojitost (čísla)“, „nenašla jsem řešení“ ve smyslu možného pokračování, „bez uspořádání“ nikoli ve smyslu uspořádání přirozených čísel. Žáci tedy často o pravidlech posloupností hovoří jako o (logickém nebo matematickém) řádu, seřazení nebo řetězci, případně považují nalezení pravidla za řešení posloupnosti. Tento přístup žáků vysvětluje, proč je jen málo žáků, kteří pravidelnost vyskytující se v posloupnostech identifikují s geometrickou pravidelností.

Přesto, že se pravidelnost nějakým způsobem vyskytovala ve všech otázkách, tři žáci v 9. A a jeden žák v 9. C nevyužili pravidelnost jako kritérium výběru ani jednou a dalších dvanáct (čtyři v 9. A a osm v 9. C) toto kritérium použili, ale nejvýše dvakrát. U těchto žáků lze většinou vysledovat jiné dominantní kritérium. Tímto kritériem byla nejčastěji osová souměrnost nebo některé z početních kritérií. Zvláště v matematické třídě docházelo ke kombinaci více těchto kritérií. Tito žáci zřejmě preferují číselné reprezentace před grafickými.

Rozpor mezi těmito reprezentacemi se nejvíce projevuje v přístupu k nejproblémovějším otázkám 6 a 9. U obou otázek použilo 35 žáků kritérium typu objektu. Přestože někteří popisovali toto kritérium slovy „nejsou to čísla“ a jiní naopak pozitivně „jsou to obrazce“ apod., považujeme za zajímavější rozebrat ostatní kritéria výběru v těchto dvou otázkách.

Například jedna žákyně v 9. A použila u obou otázek převod na čísla tím způsobem, že ze skupiny čísel udělala součet a v n-úhelníku spočítala počet vrcholů — každý objekt tak byl reprezentován jedním číslem, z nichž vybírala nepatřící členy pomocí dělitelnosti (v otázce 6 dělitelnost dvěma, v otázce 9 dělitelnost třemi).

Podobně jiná žákyně v 9. C, která mimochodem nepoužila ani jednou kritérium pravidelnosti, použila u obou otázek kritérium „obsahuje sudé číslo“, přičemž za jeden ze způsobů obsahování sudého čísla uvádí „má sudý počet vrcholů“. Toto kritérium použil u otázky 6 také jeden její spolužák.

Další žákyně v 9. C uvedla v otázce 9 kritérium „nemají v sobě obsaženo č. 7“, kterým ze skupiny vyloučila trojúhelník a posloupnost $3, 6, 12, 24, 48$ číslo 7 (oproti dvěma posloupnostem obsahujícím číslo 7 a pravidelnému sedmiúhelníku).

Další přístup použil žák v 9. C, který považoval každé číslo za bod a každý vrchol za bod — skupiny čísel tak obsahovaly pět bodů a žák vyloučil čtverec jako objekt s pouze čtyřmi body a šestiúhelník jako objekt s nejvyšším počtem šesti bodů.

Téměř všichni žáci, kteří v těchto otázkách použili kritérium pravidelnosti nezávisle na typu objektu, použili přímo slovo (ne)pravidelný. Jeden žák v 9. C uvedl kritérium „má mat. řád“, které ale aplikoval pouze na skupiny čísel, jeden žák svoje kritérium výběru popsal slovy „není to logicky uspořádané“ — pravidelné mnohoúhelníky považoval za logicky uspořádané.

V ostatních otázkách používali žáci až na drobné odchylky ve vyjádření velmi přesně kritéria, které jsme popsali v části 4.4.2. Samozřejmě v ostatních a nematematických kritériích výběru byl velký rozptyl odpovědí. Z nematematických například: „vypadá jako skvrna“, či „vypadá jako kostel“ po prosté nelíbí se mi

4.5 Shrnutí výsledků

Na základě získaných dat můžeme rozhodnout o pravdivosti hypotéz, které jsme uvedli v kapitole 4.1, pro vybraný vzorek žáků. Pro přehlednost je uvádíme opětovně společně s tímto rozhodnutím. Hypotézy byly formulovány skepticky, proto vyvrácení některých z nich vnímáme pozitivně.

Hypotéza 1

Žáci vnímají odděleně pravidelnost v rovině a v prostoru.

Tato hypotéza byla vyvrácena. Svědčí o tom četnost využití (a bezchybnost) kritéria pravidelnosti u otázek kombinujících rovinné a prostorové útvary. Jedna z těchto otázek (otázka číslo 8) byla dokonce otázkou s druhým nejčastějším výskytem tohoto kritéria v odpovědích žáků. Celkově bylo kritérium pravidelnosti u tří otázek zaměřených na vnímání spojitosti mezi geometrickou pravidelností v rovině a v prostoru použito ve 45 odpovědích, z toho 44 odpovědí bylo správných. Na tyto otázky byly častější pouze odpovědi v kategorii typ objektu.

Hypotéza 2

V geometrii bude pro žáky pravidelnost méně určující než vlastnosti, na které je v učebnicích druhého stupně kladen větší důraz: osová a středová souměrnost, pravoúhlost.

Tato hypotéza byla jednoznačně vyvrácena pro obě souměrnosti. V otázkách zaměřených na souměrnosti se kritérium pravidelnosti vyskytovalo dohromady v 56 správných odpovědích, zatímco souměrnosti se vyskytovaly dohromady pouze ve 42 správných odpovědích na tyto otázky. Kritérium pravoúhlosti bylo používáno v otázkách zaměřených na něj více než kritérium pravidelnosti. V matematické třídě byl tento rozdíl markantní: pravidelnost se vyskytovala v 5 odpovědích, zatímco pravoúhlost v 17 odpovědích. Pravoúhlost je tedy pro žáky více určující vlastností než pravidelnost.

Hypotéza 3

Žáci nevnímají spojitost mezi číselnou a geometrickou pravidelností.

Tato hypotéza se potvrdila. Přestože existují žáci, kteří tuto spojitost vnímají, je jich poměrně málo — konkrétně 5 z 37.

Hypotéza 4

Žáci s větší oblibou matematiky a s lepším prospěchem v matematice budou pravidelnost vnímat více než žáci s horším prospěchem a menší oblibou matematiky.

Tato hypotéza by pro ověření nebo definitivní zamítnutí potřebovala větší vzorek žáků. Na základě získaných dat lze pouze odhadovat, že spíše neplatí. Jedním z důvodů může být problém s příliš zjednodušujícími kategoriemi známky a oblíbenosti pro matematiku jako celek. Žáci, kteří mají rádi matematiku nemusí mít stejně rádi i specificky geometrii. Podobně žáci, kteří mají prospěch kolem dvojky, si mohou známku vylepšovat v testech z různých matematických disciplín.

Závěr

Cíl práce byl u vybraného vzorku žáků splněn. Přestože byla většina hypotéz vyvrácena, je možné toto zjištění vnímat pozitivně díky skeptické formulaci hypotéz. Prokázalo se, že přestože je pravidelnost v učebnicích upozaďována, žáci jsou schopni ji vnímat lépe, než jsme očekávali. Pro absolutní tvrzení by samozřejmě byl potřeba rozsáhlejší výzkum s větším statistickým vzorkem.

Kromě výzkumu a jeho vyhodnocení je důležitou součástí práce i výčet alespoň některých vlastností pravidelných geometrických útvarů v rovině a v prostoru, které mohou být inspirací pro tvorbu úloh pro žáky základních a středních škol.

Tématem, které se při zpracovávání této práce ukázalo jako zajímavé a mohlo by být předmětem další práce, je motivační síla pravidelných útvarů a možnosti jejího využití. Pravidelné objekty lze využít v úlohách z mnoha oblastí matematiky a výsledkem by mohla být mimo jiné sbírka úloh s pravidelnými objekty.

Zkušenosti získané při tvorbě a zpracování této práce jsou cenné nejen pro případnou další vědeckou činnost, ale i pro učitelskou praxi. Jde například o seznámení se s testy zaměřenými na více než jednu odpověď, ale také o nahlédnutí do způsobu vyjadřování různých typů žáků, obohacení náhledu na pravidelnost o periodické funkce a periodický rozvoj desetinných čísel, nebo o informace získané v citovaných zdrojích a další literatuře.

Literatura

ADAM, Paul a WYSS, Arnold. *Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde: einschliesslich: "Die Sonderlinge"- Die Archimedischen Körper Cubus simus und Dodecaedron simum. Das Rätsel ihrer Herkunft.* 2., unveränd. Aufl. Bern: Haupt, ©1994. 136 s.

BEČVÁŘOVÁ, Martina. *Vývoj matematiky jako popularizující stimul: vzdělávací modul matematika : výukový a metodický text : Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze: aktivně, aktuálně a s aplikacemi - projekt OPPA*. Vyd. 1. Praha: P3K, 2012, 59 s. ISBN 978-80-87186-77-0. Dostupné z:
http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/oppa/matematika_stimul_blok.pdf

BINTEROVÁ, Helena a kol. *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007, 2 sv. ISBN 9788072386567.

BINTEROVÁ, Helena a kol. *Matematika 7 pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008, 2 sv. ISBN 9788072386819.

BINTEROVÁ, Helena a kol. *Matematika 8: pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009, 2 sv. ISBN 9788072386864.

BINTEROVÁ, Helena a kol. *Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia.* 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010, 2 sv. ISBN 9788072386918.

BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF. *Planimetrie.* 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2009, 148 s. ISBN 978-80-7290-404-4.

COUFALOVÁ, Jana a kol. *Matematika pro 6. ročník základní školy.* Praha: Fortuna, 1998. ISBN: 978-80-7168-992-8.

COUFALOVÁ, Jana a kol. *Matematika pro 7. ročník základní školy.* Praha: Fortuna, 1999. ISBN: 978-80-7168-993-5.

COUFALOVÁ, Jana a kol. *Matematika pro 8. ročník základní školy.* Praha: Fortuna, 2000. ISBN: 978-80-7168-994-2.

COUFALOVÁ, Jana a kol. *Matematika pro 9. ročník základní školy.* Praha: Fortuna, 2000. ISBN: 80-7168-995-5.

EUKLEIDES. *Základy XI – XII.* Plzeň: OPS, 2011. ISBN: 978-80-87269-24-4.

FENDT, Walter. *Platónská tělesa.* Walter Fendt Homepage [online]. 1998, 14. března 2006 [cit. 2012-06-13]. Dostupné z: http://www.walter-fendt.de/m14cz/platon_cz.htm

CHMELÍKOVÁ, Vlasta a Luboš MORAVEC. MFF UK. *Pravidelné mnohostěny.* Praha, 2007, 23 s. Dostupné z: http://www.sgo.cz/stranky_predmetu/mat/Studijni_literatura/Pravidelne_mnohosteny.pdf

NĚMEC, Miroslav. *Pravidelný pětiúhelník.* Praha, 2007. Bakalářská práce. Dostupné z: repozitář závěrečných prací UK v Praze. ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997, 88 s. ISBN 8071960926.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 87 s. ISBN 8071961299.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 79 s. ISBN 8071961833.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 80 s. ISBN 8071962120.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro střední odborné školy: základní poznatky.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2009, 214 s. ISBN 9788071963943.

PLATÓN. *Timaios; Kritias.* 2. vyd. Praha: OIKOYMENH, 1996. 137 s. Oikúmené. Platónovy spisy; 17. ISBN 80-86005-07-0.

ROSECKÁ, Zdena. *Geometrie: učebnice pro 6. ročník.* Brno: Nová škola, 1997, 85 s. ISBN 8085607530.

ROSECKÁ, Zdena. *Geometrie: učebnice pro 7. ročník.* Brno: Nakladatelství Nová škola, 1998, 85 s. ISBN 8085607751.

ROSECKÁ, Zdena a Arnošt MÍČEK. *Geometrie: učebnice pro 8. ročník*. Brno: Nová škola, c1999, 110 s. ISBN 808560793x.

ROSECKÁ, Zdena a Arnošt MÍČEK. *Geometrie: učebnice pro 9.* ročník. Brno: Nová škola, 2000, 111 s. ISBN 8072890204.

SUTTON, Daud. *Platónská a archimedovská tělesa: geometrie prostoru*. 1. vyd. v českém jazyce. Praha: Dokořán, 2011. 66 s. Pergamen; sv. 7.

SVOBODOVÁ, Veronika. *Historie pravidelných mnohostěnů*. Brno, 2006. Rigorózní práce. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/15501/prif_r/kostra.pdf

ŠMÍD, Radek. *Platónská tělesa*. Praha, 2012. Bakalářská práce. Dostupné z: repozitář závěrečných prací UK v Praze.

VYTISKOVÁ, Adéla. *Mnohostěny a diskrétní povrchy*. Plzeň, 2009. Bakalářská práce. Dostupné z: https://stag-ws.zcu.cz/ws/services/rest/kvalifikacniprace/downloadPraceContent?adipIdno=31656

WIKIMEDIA FOUNDATION. *Wikimedia obrázky* [online]. 2012 [cit. 2012-06-13]. Dostupné z: http://wikipedia.org *Svět těles* [online]. [cit. 2012-06-5]. Dostupné z: http://telesa.wz.cz/

Seznam příloh

Příloha 1: Dotazník na téma pravidelnosti pro učitele matematiky a studenty pedagogické fakulty

Příloha 2: Dotazník pro žáky devátého ročníku